This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL.

On trouve chez le même Libraire, la collection complète des ouvrages élémentaires, publiés par S. F. LACROIX, membre de l'Institut national, savoir :

Traité élémentaire d'Arithmétique à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations, 2 fr.

Elémens d'Algèbre, 4 fr.

Complément des Elémens d'Algèbre, 4 fr.

Elémens de Géométrie, 4 fr.

Complément des Elémens de Géométrie, ou Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes, 3 fr.

Traité élémentaire de Trigonométrie et d'application de l'Algèbre à la Géométrie, 4 fr.

Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, 7 fr. 50 cent.

Ce dernier ouvrage est tiré en partie du Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, *en* 3 *vol.* in-4°. *du même auteur.*

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL;

Précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées.

PAR S. F. LACROIX.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN X = 1802.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
343741
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
1905

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

RÉFLEXIONS

Sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées.

Les fonctions que j'ai remplies dans l'enseignement public ; et les travaux auxquels je me suis livré depuis long-temps, m'ayant conduit à faire la revue des diverses branches qui composent les Mathématiques pures, j'ai cru qu'en publiant aujourd'hui la dernière partie du Cours élémentaire de cette science, je ferois une chose utile de présenter les réflexions que m'ont suggérées, sur la manière d'enseigner les Mathématiques et d'apprécier le savoir et la capacité de ceux qui les ont étudiées, les observations que j'ai faites sur moi-même et sur le grand nombre de jeunes gens dont j'ai suivi les progrès.

La culture des sciences se présente sous deux points de vue qu'il faut bien distinguer : tantôt elle n'est qu'un moyen d'exercer l'esprit, de développer les facultés intellectuelles, et de rendre propre à la méditation et à la discussion ; quelquefois aussi, mais par malheur beaucoup plus rarement qu'on ne le croit en général, elle fournit des préceptes et des résultats immédiatement applicables aux usages de la vie, aux besoins de la société.

Quand on l'envisage sous le premier rapport, celui qui la constitue une partie essentielle de l'éducation, on reconnoît la nécessité de ne rien traiter superficiellement dans les objets qu'on y fait entrer, de diminuer plutôt le nombre de ces objets, s'il le faut, que de sacrifier à la briéveté aucun des développemens nécessaires pour parvenir à toute l'évidence que comporte le sujet, ou pour rendre sensible le mécanisme du raisonnement.

L'enseignement des sciences est à cet égard assujetti aux mêmes règles que celui des arts: le choix des exemples est bien plus important que leur nombre; quelques vérités bien approfondies éclairent beaucoup plus sur la méthode qu'un grand nombre de théories discutées d'une manière incomplète. Les unes jettent des racines profondes qui ne manquent jamais de s'étendre, et d'où sortent des tiges dont les rameaux nombreux sont chargés de fruits; les autres, qui ont à peine effleuré le sol, disparoissent bientôt après avoir offert un stérile aliment à la vanité.

Ces remarques, sur lesquelles il seroit superflu de s'appesantir, font voir assez qu'on ne sauroit s'écarter dans les écoles publiques de cette sévérité qui donne aux preuves tout le développement et toute la rigueur dont elles sont sus-

ceptibles, et qui n'emprunte des apparences et des sensations que ce qu'il n'est pas possible de tirer du jugement seul.

Aurois-je besoin d'avertir ici que je ne parle pas des premières instructions données à l'enfance, à l'égard de laquelle il convient d'employer le plus souvent le témoignage des sens? J'ai indiqué ailleurs comment je crois qu'il faudroit initier un jeune enfant aux mathématiques (Elémens de Géométrie, discours prélim.); mais après qu'il auroit été imbu des vérités fondamentales de la science par un procédé plutôt expérimental que théorique, on ne sauroit se dispenser de lui en faire recommencer l'étude par des principes purement rationnels, sans lesquels il n'y a jamais d'instruction solide. En général, quelqu'opinion qu'on adopte sur les relations que nos sensations ont avec nos idées, et sur ce que nous pouvons y mettre de notre propre fonds, il me semble qu'on ne peut s'empêcher de convenir que l'Instituteur doit chercher à ramener son élève en lui-même, dès qu'il a acquis un assez grand nombre de notions extérieures à comparer entr'elles, et qu'il peut l'y retenir d'autant plus que cette collection de faits est plus grande ou qu'il est plus avancé en âge.

Je déclare donc que je laisse de côté la dis-

cussion de tout ce qui regarde les connoissances préparatoires qui rendent un enfant susceptible d'application; je confesse mon ignorance sur la manière dont les idées de *nombre* et de *grandeur* s'acquièrent, et je me borne à examiner ici comment, avec ces matériaux déjà élaborés par une première instruction, empirique si l'on veut, on peut faire entrer dans des têtes de quinze à seize ans la Théorie élémentaire des sciences mathématiques et les formes des méthodes qui leur sont propres. On trouvera peut-être que j'ai fait commencer cette étude un peu tard, et je conviens que j'ai rencontré des enfans beaucoup plus précoces, mais ce sont encore des exceptions trop peu nombreuses pour modifier la règle générale. J'aime à croire qu'elles deviendront moins rares si l'éducation première se perfectionne: jusque-là je m'en tiens à ce que j'ai remarqué le plus souvent.

Je dois encore m'arrêter sur l'idée que je me suis formée de l'enseignement public, celui que j'ai principalement en vue dans ce moment, et montrer les caractères qui le distinguent de l'enseignement particulier. Je trouve entre l'un et l'autre les mêmes différences qui se rencontrent dans les arts entre les travaux d'un manufacturier et les produits du laboratoire d'un chimiste. Celui-ci, qui se propose toujours de tirer d'une sub-

stance en particulier tout ce qu'elle peut contenir, n'épargne aucun soin, ne regarde à aucune dépense pour traiter le corps sur lequel il opère; c'est ainsi que lorsqu'un instituteur s'est chargé de l'éducation des enfans d'un particulier, il doit, quelque difficulté qu'il rencontre, tirer des foibles dispositions de ces enfans, les plus grands résultats possibles; le travail du professeur public, au contraire, comme celui du manufacturier, ne doit pas être apprécié par des résultats individuels, mais par un ensemble de résultats tels que la chose publique ou la manufacture en ait retiré le plus grand avantage.

Que reclame donc l'intérêt de la société? Que la masse des lumières s'augmente, et sur-tout que la distribution du travail s'opère en raison des facultés, sinon rigoureusement (cela est impossible), du moins d'une manière approximative. Or c'est satisfaire à ce vœu que de rendre l'instruction assez approfondie pour manifester le talent, pour l'éclairer sur sa vocation, pour lui montrer la route qu'il doit tenir, afin de marcher vers la perfection, et assez sévère en même temps pour écarter la médiocrité d'occupations, toujours oiseuses et stériles entre ses mains, et la renvoyer à des travaux par lesquels elle peut se rendre utile. Ce triage, et pour ainsi dire ce *départ* des esprits est un des

figure, dans un calcul, des circonstances, prévoyent dans une opération à effectuer, des effets, qu'on ne peut jamais rendre sensibles à un commençant.

Mais ce qu'on peut toujours faire avec succès, c'est d'analyser les diverses formes de raisonnement qu'on employe, c'est de montrer comment des preuves qui paroissent plausibles, dont la conclusion vraie en elle-même est apperçue presque immédiatement par l'esprit, ne mênent pas néanmoins d'une manière nécessaire à cette conclusion, et sont par conséquent fautives. La plupart des livres élémentaires fourmillent de fautes de ce genre, et me paroissent par-là très-peu convenables à l'éducation; car quoi de plus important que de prémunir la jeunesse contre les erreurs du raisonnement, contre la séduction du paralogisme; et quelle circonstance plus propre à mettre en défiance sur les conclusions précipitées, les énumérations incomplètes, sources de toutes nos erreurs, que celle où des vérités presque palpables se présentent sous des points de vue spécieux au premier coup d'œil? D'ailleurs, pour mettre le défaut d'exactitude en évidence, et pour y suppléer, il faut employer des raisonnemens très-fins, des propositions accessoires dont l'ensemble exerce beaucoup l'esprit et

le jugement, et préparent l'élève à saisir des choses très-difficiles.

Ce qui regarde en particulier les propositions de géométrie, dont on abrège ordinairement les démonstrations par la considération de l'infini, exige des attentions délicates, demande qu'on insiste beaucoup sur la théorie des plans et des corps (ou solides) et accoutume les jeunes gens à se représenter les formes des corps et à imaginer de nouvelles combinaisons de ces formes. Cet exercice très-capable de fortifier l'attention, utile à tous ceux qui peuvent avoir à diriger des constructions, à concevoir des machines, ou à se rendre compte de leur effet d'après un dessin ou une description, est par tous ces motifs bien préférable à des raisonnemens vagues qui ne s'adressant guères qu'à la mémoire peuvent être répétés sans être compris.

Jusqu'où doit-on pousser les élémens; voilà la question qui se présente immédiatement après celles que je viens d'examiner. J'avoue qu'il seroit difficile de poser des limites fixes à ces ouvrages. Le but pour lequel on étudie varie de tant de manières, qu'il n'est guère possible de circonscrire exactement les objets qu'il faut connoître. Cependant il y a certaines règles générales qui se présentent d'elles-mêmes, et aux-

quelles pourtant la plupart des auteurs paroissent avoir fait peu d'attention. Premièrement éviter les doubles emplois ; cela devient d'autant plus nécessaire que les progrès récens des sciences physiques et mathématiques ont prodigieusement augmenté la masse des objets d'instruction. C'est à mon avis, une faute dans un auteur qui doit traiter l'algèbre, de surcharger l'arithmétique d'opérations qui ne s'y présentent pas naturellement, et de se traîner péniblement en trigonométrie sur des démonstrations synthétiques.

Sans doute lorsqu'on n'embrasse que l'arithmétique et la géométrie, il faut faire entrer dans ces deux branches le plus de choses usuelles qu'il est possible ; mais si l'on doit aller au-delà, ne convient-il pas mieux d'employer le temps des élèves à leur faire connoître des résultats nouveaux, plutôt que des procédés différens pour parvenir au même résultat : et qu'on ne dise pas que la comparaison de ces procédés est nécessaire pour saisir l'esprit des méthodes ; car je me suis convaincu par mon expérience que l'application même des diverses méthodes à des objets qui leur sont propres suffit pour cela, toutes les fois qu'elle est bien faite, et lorsqu'on passe d'une méthode à une autre par leurs véritables points de contact.

Secondement, choisir toujours les méthodes les plus générales. Cette règle est en quelque sorte une conséquence de la première; car par le moyen de ces méthodes on évite infailliblement les doubles emplois. *Préférez dans l'enseignement les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles*, a dit Laplace (Journal des séances de l'Ecole Normale), et on peut ajouter qu'elles sont aussi les plus propres à faire connoître la vraie métaphysique de la science.

Il seroit bien temps qu'on se défît de cette prédilection pour certaines méthodes particulières, parce qu'elles sont, à ce qu'on dit, plus élémentaires que les méthodes générales, ou pour dire vrai, parce qu'elles sont plus anciennes et par-là plus conformes à des habitudes acquises depuis long-temps et qu'il en coûteroit trop de réformer. Cependant il faut bien tôt ou tard cesser de se traîner sur les pas des auteurs même les plus célèbres, puisque la science a fait depuis l'époque où ils ont écrit, des progrès qui changent entièrement la liaison des propositions et souvent le langage. Les Géomètres des siècles précédens conserveront toujours leurs droits sur les découvertes de leurs successeurs, et leurs méthodes ne

perdront pas de leur prix, mais deviendront des objets d'érudition dont l'étude sera recommandée à ceux qui voudront approfondir la science et la perfectionner (*).

(*) Par la raison qu'on n'oblige plus maintenant les jeunes gens qui veulent connoître les courbes du second degré, à étudier les sections coniques d'Apollonius, on finira sans doute par ne pas exiger qu'ils les sachent par les méthodes de l'Hopital ou de Guisnée, s'il est une fois bien reconnu que toutes les propriétés particulières de ces courbes, quoique fort curieuses et nécessaires pour entendre la théorie des forces centrales dans les écrits d'Huygens et de Newton, sont devenues inutiles depuis qu'on ne considère le mouvement des corps qu'analytiquement, et qu'on arrive immédiatement par le calcul aux derniers résultats, sans rien emprunter des figures et des constructions. Je pense donc, avec plusieurs Géomètres célèbres, que la théorie des courbes du second degré ne doit plus être considérée aujourd'hui que comme un cas particulier de celles des courbes représentées en général par une équation algébrique à deux indéterminées. Le premier anneau de cette chaîne est la ligne droite dont les propriétés sont aussi renfermées dans l'équation du premier degré qui lui correspond; développer ces propriétés, montrer comment on peut analyser les courbes du second degré, par la transformation des coordonnées qui sert aussi pour celles des degrés supérieurs, voilà, ce me semble, ce qui convient à l'état actuel des mathématiques. Toute

C'est

C'est une erreur de croire que les méthodes générales ayent besoin d'être précédées par l'exposition des méthodes particulières; elles se suffisent à elles-mêmes lorsqu'elles sont présentées convenablement, et qu'elles ne rencontrent pas dans la tête de ceux qui les étudient ou qui les jugent, de vieilles idées à effacer ou des préjugés à détruire. Enfin la nécessité de faire un choix entre les méthodes, n'est pas douteuse pour tous ceux qui connoissent l'étendue de la science; et si l'on regrette les méthodes synthétiques parce qu'on croit y trouver plus d'évidence, on ne peut pas de bonne foi les préférer aux méthdes analytiques qui sont plus fécondes, et d'après lesquelles sont rédigés les écrits des Géomètres de notre temps, qu'il faut nécessairement étudier dès qu'on veut s'élever au-delà des élémens (*).

---

autre considération, quelqu'élégante qu'elle soit d'ailleurs, portant nécessairement sur des objets de détail, pourra intéresser les personnes qui cultivent spécialement la géométrie et l'analyse, mais ne sauroit jamais entrer dans l'enseignement des élèves qui ne se livrent à l'étude de ces sciences que pour perfectionner leur éducation ou pour se préparer à la mécanique, et aux sciences physico-mathématiques.

(*) J'observerai à cette occasion qu'il est bien important de coordonner les ouvrages élémentaires avec ceux

Dirigé par ces considérations dans le choix et l'ordonnance des matériaux d'un Cours, il ne reste plus qu'à les mettre en œuvre; et à cet égard la tâche du professeur est bien différente de celle de l'écrivain: celui-ci doit éviter sur-tout la prolixité; car les bons esprits aiment beaucoup mieux lutter contre les difficultés d'un livre un peu concis que de suivre pas à pas des détails superflus qui arrêtent leur marche et leur font perdre de vue l'objet principal, noyé dans une foule d'accessoires. D'ailleurs, tandis que le livre fixe les différentes parties des propositions sous les yeux du lecteur, la parole fugitive oblige le professeur à des répétitions qui seroient insoutenables dans l'auteur. Cependant le premier doit prendre garde de se laisser entraîner à

---

qui contiennent le perfectionnement de la science: on épargne par ce moyen beaucoup de peine aux jeunes gens, et on leur conserve pour se frayer de nouvelles routes, les forces qu'ils auroient épuisées à chercher l'état de la science. Il est incontestable aujourd'hui que la *Mécanique analytique* et la *Mécanique céleste* sont les véritables sources où l'on peut acquérir la connoissance complète et méthodique de toutes les propriétés de l'équilibre et du mouvement des corps, soit solides, soit fluides, objets qui forment la principale application de l'analyse transcendante; il faut donc que désormais les élémens soient composés de manière à conduire à ces ouvrages.

une abondance stérile de mots que le vulgaire prend pour de la facilité et de la fécondité; et doit resserrer par des résumés fréquens ce qu'il a développé avec un peu d'étendue : il faut présenter sans cesse à l'imagination des auditeurs des points fixes, sans quoi elle s'égare bientôt.

L'auditeur et le professeur, le lecteur et l'auteur, doivent s'entr'aider mutuellement; il y a dans chaque science des choses qui ne peuvent s'enseigner, et que l'élève doit acquérir par lui-même; c'est l'habitude des procédés de la science, ou autrement le mécanisme des opérations qu'elle prescrit : en arithmétique et en algèbre ce sont des calculs, en géométrie, des constructions.

Les jeunes gens ne peuvent saisir l'esprit des méthodes lorsque le mécanisme du calcul absorbe seul toute leur attention; le professeur préviendra cette difficulté, en donnant beaucoup d'opérations à faire à ses élèves, en les accoutumant à y mettre de l'ordre, seul moyen de soulager l'attention et d'en reculer les bornes, parce qu'il permet d'interrompre le calcul et de le reprendre à volonté. Ils pourront alors en entreprendre de très-longs, les vérifier par parties, et par-là compter sur l'exactitude des résultats Beaucoup de gens ne témoignent tant d'aversion pour le calcul, que par l'incertitude où ils

sont d'obtenir un résultat exact de ceux auxquels ils voudroient bien d'ailleurs se livrer, et parce que n'ayant aucun ordre, ils ne peuvent suspendre le travail lorsque leur attention est épuisée. Obligés d'envisager une opération dans toute son étendue, l'espace qui sépare le commencement et la fin et qui les effraye, ne les eût point arrêtés s'ils eussent pu le partager. Un auteur ne peut à cet égard, comme à beaucoup d'autres, que donner des conseils, offrir quelques exemples que le lecteur doit regarder comme des types, et sur le modèle desquels il doit effectuer beaucoup d'opérations particulières, après avoir suivi dans tous leurs détails et la plume à la main, celles du livre.

Voilà ce qu'il convient de faire pour conduire des auditeurs, ou des lecteurs, à l'intelligence parfaite des différentes propositions d'un Cours soit oral, soit écrit; mais il reste encore à leur mémoire une tâche à remplir, dont il faut déterminer la nature et l'étendue.

Lorsqu'on n'envisage que l'exercice de l'esprit, il est peu important de charger sa mémoire de tous les objets qui ont servi à cet exercice. Que l'esprit soit pénétrant, que le jugement soit prompt et sûr, qu'importe les moyens dont on a fait usage pour obtenir ces résultats, s'ils ne doivent plus se représenter dans le reste de la

vie? Le magistrat, par exemple, formé aux discussions et à l'examen des preuves, par l'étude des sciences exactes, peut oublier sans inconvénient, et pour toujours, les propositions techniques de ces sciences, comme l'homme qui s'est exercé à l'escrime dans la vue de développer ses membres, de leur donner de l'agileté, de la souplesse, passe bientôt à des travaux plus utiles, et perd entièrement de vue toutes les finesses de cet art,

Ce n'est donc qu'à ceux qui veulent pratiquer une science, qu'est spécialement imposée l'obligation d'en confier les résultats à leur mémoire; mais jusqu'où doit aller cette obligation? que faut-il retenir principalement? C'est ce que je vais discuter. Je commence par établir deux fonctions dans la mémoire; celle de rappeler les choses en masse et celle de les reproduire dans tous leurs détails: l'une sera la *mémoire des choses*, et l'autre *celle des mots*. On doit sans doute les exercer avec soin toutes les deux, mais la seconde semble plutôt affectée à l'étude des langues et des nomenclatures, et l'autre est la seule qu'on devroit exiger de ceux qui cultivent les sciences exactes. Elle est nécessaire pour y faire quelques progrès, quand même on ne se proposeroit pas de les appliquer, parce que dans une suite de propositions bien enchaî-

nées, il faut toujours se rappeler, au moins dans leur objet, les antécédens pour sentir la vérité des conséquens. Dire que le raisonnement doit les faire retrouver lorsqu'on en a perdu le souvenir, c'est comme si l'on disoit que la science a pu être inventée en entier par le premier qui s'en est occupé.

La mémoire est encore très-nécessaire pour conduire aux découvertes, parce qu'elle fournit au moment où l'on en a besoin, des secours qu'on ne penseroit pas à chercher dans les livres, qu'on n'y trouveroit même pas à point nommé; mais cette mémoire ne se cultive que par l'usage fréquent qu'on fait des choses qu'on lui confie, et non pas par un travail forcé, par des répétitions continuelles: elle vient sans qu'on y pense. Euler, celui de tous les Géomètres dont la tête étoit le plus remplie de formules et de résultats, ne s'étoit sûrement pas assujetti à en apprendre par cœur tous les jours un certain nombre.

Lorsqu'on applique les sciences, c'est par des formules ou par des procédés mécaniques, dont il faut se rendre l'usage familier, afin d'opérer avec célérité, sûreté et précision: voilà tout ce qu'on peut demander pour les objets vraiment usuels dont le nombre est fort petit; et c'est à quoi l'on arrive toujours aisément

dès qu'on en sent le besoin. On ne sauroit nier qu'un homme accoutumé à captiver son attention ne parvienne à exécuter avec promptitude et avec précision des opérations intellectuelles qu'il sera obligé de répéter fréquemment. On peut sur cela s'en rapporter à la nécessité et à la pratique (*).

A l'égard des objets plus compliqués, il n'y a point d'inconvénient à recourir aux livres ; et je ne vois dans aucun cas, la nécessité de charger sa mémoire de démonstrations et de formules. Ce qu'il faut bien posséder, c'est la marche des méthodes, la valeur des termes techniques, l'intelli-

(*) On est quelquefois tout étonné de voir un élève fort instruit en mathématiques éprouver quelque difficulté à effectuer des calculs numériques, et on en conclut qu'il n'est pas propre à exercer des professions où il y a beaucoup de ces calculs à faire. C'est-là un lieu commun de plaintes pour ceux qui s'attachent aux petites choses ; mais on peut leur répondre que des hommes sans instruction parviennent à faire mécaniquement des calculs numériques très-longs, par cela seul qu'ils en font beaucoup, et qu'apparemment les connoissances acquises par l'élève dont il s'agit ne l'empêcheront pas d'obtenir le même succès lorsqu'il sera obligé de se livrer journellement au même travail. Il pourra, comme un autre, acquérir de lui-même, perdre ensuite et se donner de nouveau, selon les circonstances, l'habitude des calculs ; car c'est ainsi que cela se passe.

genre des *idiotismes* de la langue, ou la faculté de saisir le sens des phrases et des formes d'expressions particulières aux principaux écrivains qui ont traité de la science, afin de pouvoir à la simple lecture comprendre leurs ouvrages, au moins ceux qu'on a étudiés ou dont on pourra avoir besoin dans la suite; enfin connoître la nature et l'enchaînement des objets qu'ils contiennent, afin de pouvoir les consulter avec fruit lorsqu'il sera nécessaire.

La mémoire la plus exercée n'atteint pas toujours ce but; la petitesse du cercle dans lequel sont nécessairement renfermés des objets appris par cœur, ne permet pas de mettre dans ces objets assez de variété pour qu'ils puissent offrir des exemples des principales difficultés qu'on rencontre dans la lecture des livres.

Puisque ce n'est pas un effort de mémoire qui constitue le vrai savoir en mathématiques, et qu'il restraint plutôt les facultés qu'il ne les augmente, c'est donc à tort qu'on emploie un *examen oral et par cœur*, pour s'assurer de la capacité des jeunes gens qui se livrent à l'étude de ces sciences. Aussi il est arrivé souvent que les hommes les plus instruits sont convenus de bonne foi qu'ils ne se croyoient pas assurés d'être reçus à un examen de ce genre, quoiqu'il portât sur des objets fort au-dessous de

leurs connoissances. On a entendu, dans une des leçons qu'il a données à l'Ecole Polytechnique, Lagrange lui-même le dire avec cette modestie qui le caractérise si éminemment. En effet, contens de posséder l'esprit des méthodes, et de savoir revenir sur les détails lorsqu'ils leur deviennent nécessaires, les Géomètres n'entreprennent pas de les confier à leur mémoire; ils se gardent bien de se condamner à un travail fastidieux qui émousseroit en eux l'esprit d'invention et de recherche. Les professeurs eux-mêmes qui parcourent successivement ces détails, ne cherchent à se rappeler que ceux dont ils ont besoin dans un intervalle de temps très-limité. Comment donc peut-on demander avec justice aux disciples ce qu'on n'exigeroit pas du maître? Ignore-t-on le temps qu'on leur fait perdre à repasser, osons le dire, à *rabacher* sans cesse la matière d'un examen pour se tenir en haleine et se préparer à répondre en même temps sur tout ce qu'ils ont appris? Croit-on que le dégoût qui suit nécessairement un travail aussi monotone, n'arrête pas le plus souvent les progrès des jeunes gens au terme où finit leur examen, ne les porte pas quelquefois à se débarrasser promptement la tête de connoissances qu'ils n'ont péniblement acquises que pour en faire

parade un seul jour, parce qu'ils n'ont pas senti ce charme que la variété jette sur des études qui présentent des objets nouveaux qu'on n'épuise pas? Aussi beaucoup d'entr'eux, guidés quelquefois en ce point par leurs maîtres, étudient le goût, les habitudes des examinateurs, cherchent exclusivement ce qui peut abréger et adoucir l'épreuve qu'ils doivent subir, et rejettent comme inutile pour eux tout ce qui ne s'y rapporte pas. Je ne sais si des raisons particulières n'empêcheront pas beaucoup de gens, qui sont intérieurement de mon avis, de convenir qu'il est fondé, mais je puis affirmer, que dans près de vingt années, employées à professer dans différentes écoles de service public, où l'on n'entroit qu'après des examens, j'ai rencontré beaucoup d'exemples de ce que j'avance aujourd'hui; et j'aurois encore beaucoup à dire si je voulois insister sur les nombreux inconvéniens de l'examen *oral* subi de *mémoire* (*).

(*) Comme il est toujours à propos de prévenir toute mauvaise interprétation, je déclare que je ne m'élève ici que contre les examens en général, et non contre les hommes distingués, à qui le gouvernement a confié à diverses époques le soin de juger les aspirans aux services publics. Je suis persuadé qu'ils ont tiré de ce moyen le meilleur parti possible; mais s'il peut tromper des

On a proposé d'y substituer l'examen par écrit, qui donne au candidat plus de temps pour rassembler ses idées, qui diminue les désavantages résultans de la timidité, qui soulage aussi l'examinateur; car pour discuter et comparer des réponses écrites, il peut quitter ou reprendre le travail suivant sa commodité et l'état de ses facultés morales: on sait d'ailleurs que l'attention est bien mieux captivée par les yeux que par les oreilles. Je crois aussi cet examen beaucoup meilleur que l'autre, pourvu qu'on le fasse rouler sur des questions concernant des applications de ce que le candidat a dû apprendre, et qui n'exigent pas qu'on le prive des secours nécessaires pour aider sa mémoire; car je soutiens qu'on en a souvent besoin pour se rappeler, soit des artifices analytiques, soit des constructions qui ne se présentent pas toujours d'elles-mêmes, sur-tout lorsqu'il y va de l'état qu'on se propose d'embrasser: les retrouver si on les avoit entièrement perdues de vue, ce seroit inventer; et l'on ne fait pas dans un moment de crise ce qui a coûté souvent beaucoup de peine

---

hommes éclairés, quels inconvéniens n'a-t-il pas entre les mains de gens médiocres et accoutumés à certaines méthodes qu'ils affectionnent à l'exclusion de celles qui valent mieux?

à de fortes têtes dans le silence du cabinet. Quoiqu'elle ne soit pas insurmontable, la difficulté de poser les questions d'un examen écrit, ne laisse pas d'être grande; je sais qu'on la vaincroit, du moins en partie, en ne prenant ces questions que dans les points fondamentaux de la science, dont il est difficile qu'on perde entièrement le souvenir; mais par cet examen seul on n'acquerroit pas de données sur la facilité que peut avoir l'élève à s'énoncer, facilité qu'il est nécessaire d'exercer et d'encourager, parce qu'elle est utile dans presque tous les instans de la vie, et qu'elle est indispensable pour des hommes qui auront un jour des projets à présenter ou à discuter en présence de leurs camarades ou de leurs supérieurs.

L'examen écrit auquel ils se prépareront dans le cours de leurs études par quelques rédactions sur les principaux objets de leurs leçons, garantira la netteté et la précision des mémoires qu'ils auront à composer; mais ce n'est qu'un examen oral qui peut faire connoître leur élocution. Voici donc comment je propose que cet examen soit fait, et c'est à ce point que j'attache le plus d'importance.

Il est évident que si quelqu'un s'annonçoit pour avoir étudié une branche des mathématiques dans un livre connu, le moyen le plus

simple de s'assurer s'il la possède réellement seroit de lui présenter l'auteur qu'il a suivi, d'en choisir quelques passages et de lui en faire faire l'explication comme s'il avoit à donner une leçon sur ce texte. Un homme, bien au courant de la science, et tout examinateur doit y être, saura bien s'assurer si le jugement dirige celui qu'il interroge de cette manière; il pourra se permettre alors des questions incidentes, et demander des développemens que ne sauroient généralement donner des candidats aux prises avec leur mémoire; et pour compléter l'épreuve, il pourra exiger que celui qui la subit, présente le tableau des divisions de la matière qu'il a embrassée, en énonce les principaux théorêmes, et les questions les plus importantes, enfin prouve qu'il connoît assez bien les ressources que lui offre son sujet, ou la table des matières de ses auteurs, pour savoir les consulter lorsqu'il en aura besoin.

En obligeant les élèves à faire la répétition de chacune des leçons qu'ils auront reçues du professeur, et à rédiger des récapitulations et des sommaires des matériaux de chaque Cours, on les prépareroit suffisamment à l'examen oral que je propose. Leur esprit beaucoup plus libre dans cette forme que dans celle qu'on suit, se montreroit avec bien plus d'avantage.

Ceci est sur-tout applicable aux jeunes gens

qui se destinent aux différens services publics. Si leurs connoissances en mathématiques devoient se borner à ce qu'exigent les travaux journaliers qu'offrent ces services, elles seroient circonscrites dans des limites fort étroites : ils pourroient la confier à leur mémoire sans qu'elle fût surchargée ; mais l'état actuel des sciences et le grand nombre des concurrens ont permis de demander davantage. Une instruction plus étendue a moins pour but l'usage immédiat que les élèves en pourront faire, que le développement de leurs facultés intellectuelles; et doit principalement servir à diriger le choix du gouvernement sur les jeunes gens qui montrent un véritable talent, et desquels il pourra espérer de plus grands services dans les occasions rares, mais importantes, où les connoissances transcendantes trouvent leur application.

Il suit de là que le vrai but de l'enseignement préparatoire que reçoivent les élèves des différens services publics, avant de passer aux *écoles d'application*, où on ne doit les occuper que des parties spéciales de ces services, est de les *initier dans les diverses branches des mathématiques, de la chimie et de la physique, de leur faire connoître la langue de ces sciences, de leur indiquer les méthodes générales, et enfin de les mettre en état de trouver par eux-mêmes, ou*

au moins de savoir chercher dans les sources, les résultats de calcul ou d'expérience dont ils pourront avoir besoin.

Si les circonstances dans lesquelles ils se trouveront exigent qu'ils fassent souvent usage de ces résultats, ils seront bientôt gravés dans leur mémoire; et le temps qu'ils auront employé à les apprendre par cœur sera perdu, s'ils ne doivent s'en servir que rarement, car ils les auront oubliés au moment où ils en auront besoin. Cette dernière réflexion a dû, ce me semble depuis long-temps, faire sentir les inconvéniens des examens subis de mémoire par des élèves qui ont une instruction complète en mathématiques. L'expérience a prouvé à tous les hommes instruits, que savoir diriger son esprit dans la méditation, et savoir étudier ce qui a été fait, étoit le vrai et le seul moyen de se rendre propre à quelque profession intellectuelle que ce soit.

C'est uniquement à procurer cette faculté que doit servir toute éducation, lorsqu'elle est donnée à une époque convenable de la vie; mais malheureusement beaucoup de circonstances s'opposent à ce que la plupart des hommes reçoivent à temps l'éducation dont ils auront besoin: des professions auxquelles il faut se livrer de bonne heure, la marine, par exemple, ne laissent pas

assez de loisir à la jeunesse pour fréquenter les écoles. Il faut à cette classe de citoyens des livres et des leçons uniquement dirigés vers l'application et bornés par conséquent à l'exposition claire et précise des préceptes ; les meilleurs traités sont alors ceux qui renferment le plus d'exemples et le moins de raisonnemens. Cette espèce de livres, qu'on doit considérer comme des manuels, dont il faut se rendre l'usage familier, est très-multipliée en Angleterre; et c'est-là probablement ce qui fait que l'instruction est beaucoup plus répandue parmi ceux qui pratiquent les arts dans ce pays que dans le nôtre.

TABLE

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Calcul différentiel.

Notions préliminaires et principes de la différentiation des fonctions d'une seule variable, Pag. 1

Définitions relatives au Calcul différentiel, 4
Règles pour différentier les fonctions algébriques d'une seule variable, 8

Des différentiations successives, 17

Développement des fonctions suivant les puissances de leur variable, 19
Théorême de *Taylor*, 22

De la différentiation des fonctions transcendantes, 23

Des fonctions exponentielles, *ibid.*
Des fonctions logarithmiques, 25
Des fonctions exponentielles compliquées, 31
Des fonctions circulaires, 32
Développemens des fonctions circulaires, 37
De la différentiation des équations quelconques à deux variables, 40
Définitions relatives aux équations, 44
De l'élimination des constantes, 48
De celle des fonctions variables, 50
Application au développement des fonctions, 51

Recherche des maxima *et des* minima *des fonctions d'une seule variable*, 55

Caractères auxquels on reconnoît s'il y a *maximum* ou *minimum*, 59

Des valeurs que prennent dans certains cas les coefficiens différentiels, et des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$, 63
Première règle pour obtenir la vraie valeur d'une fonction qui devient $\frac{0}{0}$, 65
Deuxième règle plus générale que la précédente, 70
Des fonctions dont le numérateur et le dénominateur deviennent infinis en même temps, 71
Des racines égales des équations algébriques, 73

Application du Calcul différentiel à la théorie des courbes, 75

Réflexions sur la métaphysique du Calcul différentiel, *ibid.*
Propositions relatives à la recherche des limites, 76
A quelles lignes correspondent les différentielles, 78
Expressions de la soutangente, de la tangente, de la normale et de la sounormale, 80
Equations de la tangente et de la normale, 82
Des asymptotes des courbes, 86

Recherche des points singuliers *des courbes*, 89

De l'*inflexion*, 90
Comment on reconnoît de quel côté une courbe tourne sa concavité, 92
Des *limites* des courbes, 93
Des points *multiples*, *ibid.*
Des rebroussemens, 94
Règle générale pour découvrir les points singuliers, 95
Des points *conjugués*, 99
Quelle est la limite du rapport de l'arc d'une courbe à la corde qui le soutend, 100
Expression de la différentielle de l'arc d'une courbe quelconque, 102
Expression de la différentielle de l'aire d'une courbe quelconque, *ibid.*

Exemple de l'analyse d'une courbe, 103

Règle pour trouver la vraie valeur des coefficiens différentiels qui deviennent $\frac{0}{0}$, 107

Des courbes osculatrices, 111

Du cercle osculateur et de sa détermination, 112
Propriétés de ce cercle et de la *développée*, 114
Définition de la *courbure* et du rayon de courbure, 117
Démonstration analytique des propriétés du cercle osculateur et de celles de la développée, *ibid.*
Des osculations et des divers contacts en général, 118
Application de la théorie des rayons de courbure, 121

Des courbes transcendantes, 125

De la logarithmique, *ibid.*
De la cycloïde, 127
Des spirales, 133
Des coordonnées polaires, 134
Expressions des différentielles des coordonnées polaires, des soutangentes, etc. 135
Transformation des coordonnées rectangles en polaires, *et vice versâ*, 136
Expression en coordonnées polaires de la différentielle de l'arc d'une courbe et de celle de son aire, 140
Transformation en coordonnées polaires de l'expression du rayon de courbure, *ibid.*
Relation qui en résulte entre les différentielles secondes de ces coordonnées, 141

Du changement de la variable indépendante, ou *comment on change la différentielle qu'on a prise pour constante, en une autre qui ne le soit plus*, 143

Formules pour transformer une expression différentielle dans laquelle on a supposé une différentielle constante, en une autre, où toutes deux soient variables, 147
De la différentiation des équations simultanées, 149
De l'élimination entre deux équations différentielles, 159

De la différentiation des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables, 151

Des différentielles partielles, 152

Développement des fonctions de deux variables, par leurs accroissemens, 15
Identité des coefficiens différentiels obtenus par des différentiations effectuées dans un ordre varié, 15
Règles pour la différentiation des fonctions de deux variables, 15
Distinction entre les *différences* et les *différentielles* partielles, 16
Recherche des coefficiens différentiels des divers ordres, 16
Remarques sur les diverses acceptions dans lesquelles on peut indiquer la différentiation des fonctions, et sur les notations qui s'y rapportent, 16
Différentiation des équations à trois et à un plus grand nombre de variables, 16
Elimination des fonctions arbitraires, 16
Développement des fonctions de deux variables suivant les puissances de ces variables, 17

Recherche des maxima *et des* minima *des fonctions de deux variables*, 17

Caractères auxquels on reconnoît s'il y a *maximum* ou *minimum*, 17

Notions générales sur l'application du Calcul différentiel à la théorie des courbes à double courbure et des surfaces courbes, 17

Des courbes à double courbure, leurs tangentes, leur plan *osculateur*, la différentielle de leur arc, et leur plan *normal*, *ibid*
Des surfaces courbes, condition de leur continuité, équations différentielles de leurs sections, équation de leur plan tangent de leur normale, détermination des *maxima* et des *minima* de leurs ordonnées, 18

SECONDE PARTIE.

Calcul intégral.

De l'intégration des fonctions rationnelles d'une seule variable, 187

Définition du Calcul intégral, *ibid.*
Intégration des fonctions monomes, 189
——— de la différentielle logarithmique, *ibid.*
——— par parties, 190
Constantes qu'on peut sortir du signe $\int$, 191
Intégration des fonctions fractionnaires, 192
Décomposition des fractions à intégrer, en fractions partielles, 194
Procédés abrégés pour opérer cette décomposition, 203

De l'intégration des fonctions irrationnelles, 216

Des fonctions contenant le radical $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, 217
Expressions des sinus et des cosinus en exponentielles imaginaires, 221
Recherche des facteurs de la fonction $x^n \pm a^n$, 224
——— de la fonction $x^{2n}+2px^n+q$, 230

De l'intégration des différentielles binomes, 231

Procédé pour ramener les différentielles binomes à d'autres plus simples par rapport aux exposans, 234

De l'intégration par les séries, 242

Expression de l'arc de cercle par sa tangente, 245
——— par son sinus, 247

De l'intégration des quantités logarithmiques et exponentielles, 251

Des quantités logarithmiques, *ibid.*
Des exponentielles, 255

De l'intégration des fonctions circulaires, 261

Conversion des sinus et des cosinus des multiples d'un arc, en puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple, et *vice versâ*, 263
Intégration immédiate des formules $d\zeta \sin\zeta^n$, $d\zeta \cos\zeta^n$, etc. 275

Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales, 284

De la nature des intégrales, et des constantes qu'il faut y ajouter, 287
Limites de la valeur d'une intégrale, 292
Intégrales indéfinies, intégrales définies, ce que c'est, 294
Confirmation de ce qui précède, par des considérations géométriques, *ibid.*
Application de la méthode ci-dessus, 297
Expression des intégrales par la série de Bernoulli, 305
De l'intégration des fonctions différentielles du second ordre et des ordres supérieurs, 306

Application du Calcul intégral à la quadrature des courbes et à leur rectification, à la quadrature des surfaces courbes et à l'évaluation des volumes qu'elles comprennent, 309

De la quadrature des courbes, *ibid.*
De celle des paraboles, *ibid.*
De celle des hyperboles et de leurs espaces *asymptotiques*, 312
Du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole, 315
De la logarithmique, 319
De la cycloïde, 320
Des spirales, 321
De la rectification des courbes, 322
De celle des paraboles, *ibid.*
Du cercle et de l'ellipse, 324
De la cycloïde, 325
Des spirales, 326

De la cubature des corps terminés par des surfaces courbes, et de la quadrature de leurs aires; de la rectification des courbes à double courbure, 327

Des surfaces de révolution, *ibid.*
Des volumes terminés par des surfaces courbes en général, et à ce sujet des intégrales doubles, 330
Application à la sphère, 335
Des aires des surfaces courbes en général, 338
Des intégrales triples, 340

De l'intégration des équations différentielles à deux variables.

De la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre, 341

Des équations homogènes, 343
De l'équation du premier degré et du premier ordre, 347
De l'équation de *Riccati*, 349

Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre; 353

Intégration des différentielles exactes à deux variables, 354
Equation d'où dépend le facteur, 361
Théorême des fonctions homogènes, 364

Des équations du premier ordre dans lesquelles les différentielles passent le premier degré, 366

Des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre, 371

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du premier ordre, 383

De la construction géométrique des équations différentielles du premier ordre, 387

Problème des *trajectoires*, 390
Interprétation géométrique des solutions particulières, 393

De l'intégration des équations différentielles du second ordre par le moyen des transformations, 396

De la multiplicité des intégrales de ces équations, 397
De l'équation du premier degré et du second ordre, 403

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du second ordre, 412

Constructions géométriques de ces équations, 414

De l'intégration des équations différentielles des ordres supérieurs au second, 416

Des équations du premier degré dans un ordre quelconque, 418
Des équations simultanées, 426

De l'intégration des fonctions de deux, ou d'un plus grand nombre de variables.

Recherche d'une fonction de plusieurs variables lorsque tous ses coefficiens différentiels d'un même ordre sont donnés explicitement ou implicitement, 430

Intégration des différentielles exactes à trois variables, 432
Conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle à trois variables puisse avoir pour intégrale une seule équation primitive, 434

Intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, 438

De l'intégration des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au premier, 445

De la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations différentielles partielles, 456

Des équations différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 458

De la méthode des variations:

Recherche de la variation d'une fonction quelconque, 471
Equations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle soit intégrable par elle-même, 468
Des intégrales *indéterminées*, et de la variation des limites des intégrales indéfinies, 472

Des maxima *et des* minima *des formules intégrales indéterminées*, 478

APPENDICE AU TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Des différences et des séries.

Du Calcul direct des différences, 489

Formation des différences, 490
Passage des différences aux différentielles, et démonstration du théorême de Taylor, 498
Sur les diverses notations du Calcul différentiel, *note.* 499
Expressions des différences par analogie avec les puissances, 503

Application du Calcul des différences à l'interpolation des suites, 507

Formule de Newton, 514
Formule de Lagrange, exprimée en facteurs, 518
De l'interpolation lorsque la fonction est donnée, 519

Du calcul inverse des différences par rapport aux fonctions d'une seule variable, données de forme, 522

De l'intégration des fonctions algébriques, rationnelles et entières, 526
De l'intégration des fonctions transcendantes, 534
Formules générales des intégrales, 535

Application du Calcul des différences à la sommation des suites, 540

De l'intégration des équations aux différences à deux variables, 541

Intégration de l'équation du premier degré et du premier ordre, 545
Des équations du premier degré dans tous les ordres, 548
Correspondance entre ces équations et les suites récurrentes, 551

De la nature des arbitraires introduites par l'intégration des équations aux différences, et de la construction de ces quantités, 552

Application du Calcul intégral à la théorie des suites, 557

Sommation des suites par des intégrales définies, *ibid.*
Exemples des valeurs particulières que prennent les intégrales définies, 563
Expression de la circonférence du cercle en produits indéfinis, due à Wallis, 565
Sommation de la suite $lx+l2\ldots+lx$, *ibid.*
Sommation des diverses portions de la série de Taylor, par les formules de Dalembert et de Lagrange, 568

ADDITIONS.

Addition au n°. 37, sur la détermination des arcs de cercles par leurs tangentes, 571

Au n°. 94, sur le signe qui doit affecter l'expression générale du rayon de courbure, 572

Au n°. 113, Remarques sur les formules qui déterminent, en coordonnées polaires, le rayon et le centre de courbure, 574

Fin de la Table des Matières.

E R R A T A.

PAGE 13, ligne 13 — $\frac{c\,dx}{x^2}$, *lisez* $\frac{c\,dx}{x^2}$

16, ligne 8, $(a-y+z)$, *lis.* $(a-y+z)^{\frac{3}{4}}$.

ibid. ligne 16, $\frac{3}{7}(c^2-x^2)^{-\frac{5}{2}}x\times-2x\,dx$,

lis. $\frac{3}{7}(c^2-x^2)^{-\frac{5}{2}}\times-2x\,dx$.

17, ligne 7, différentielles, *lis.* différentiations.

18, *note*, ligne dernière, page 69, *lisez* page 9.

40, ligne 10, par la suite, *ajoutez* dans le Calcul intégral.

55, ligne 1, $d\,x$, *lis.* $d\,x^3$.

66, ligne 10, $x^3-\frac{ax^2-a^2x+a^3}{x^2-a^2}$,

lis. $\frac{x^3-ax^2+a^2x+a^3}{x^2-a^2}$.

81, ligne pénult., $TM=$, *lis.* $TM=\sqrt{m\,x+4x^2}$.

96, ligne 9, $x=0$, *lis.* $x=a$.

107, *note*, ligne 2, $\frac{y}{dx}$, *lis.* $\frac{dy}{dx}$.

122, ligne 18, $\frac{1}{2}m$, *lis.* $-\frac{1}{2}m$.

123, ligne 2, *affectez la valeur de* y *du signe* $-$.

127, ligne 5, $\frac{1}{A}$, *lis.* $\frac{1}{l'A}$.

129, *note*, ligne 2, *ajoutez au second membre de l'équation le terme* $-\sqrt{2ay-y^2}$.

138, ligne 6, u^n, *lis.* $u^{\frac{1}{n}}$

162, ligne 3, $\frac{d^2u}{dy}$, *lis.* $\frac{d^2u}{dy^2}$; ibid. $\frac{d^3u}{dx^2dy}$,

lis. $\frac{d^3u}{dxdy^2}$

Page 176, ligne 17, $k^2=0$, *lis.* $k=0$.

237, ligne dernière, *affectez du signe* ∫ *le dernier terme de la formule.*

298, ligne 16, $-\sqrt{1-x}$, *lis.* $-\frac{2}{3}\sqrt{1-x}$.

320, ligne 6, *mettez un signe* ∫ *au second membre.*

ibid. ligne 7, équation, *lis.* fonction.

468, ligne 4, *à compter d'en bas*, intégrale, *lis.* intégrable.

499, *note*, ligne 2, il me, *lis.* elle me

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE CALCUL INTÉGRAL.

PREMIERE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Notions préliminaires et principes de la différentiation des fonctions d'une seule variable.

1. Dans la partie de l'Analyse qui va nous occuper, on prend pour sujet le passage d'une ou de plusieurs quantités par différens états de grandeurs et les changemens qui en résultent dans d'autres quantités dépendantes pour leur valeur de celle des premières.

2. Pour exprimer qu'une quantité dépend d'une ou de plusieurs autres, soit par des opérations quelconques, soit même par des relations impossibles à assigner algébriquement, mais dont l'existence est déterminée par

des conditions certaines ; on dit que la premiè
fonction des autres. L'usage que nous ferons de c
par la suite en éclaircira la signification.

3. La quantité considérée comme change
grandeur, ou pouvant en changer, est appelée v
et l'on donne le nom de *constante* à celle que l'o
dère comme conservant toujours la même valeur
cours du calcul. On voit d'après cela que c'est l
de la question qu'on se propose qui détermine
sont les quantités qu'on doit regarder comme
ou comme constantes.

4. Pour éclaircir ceci, proposons-nous
exemples ; soit $u=ax$, a étant regardé com
tante : u est une fonction de x, de l'ord
simple, puisque c'est une quantité propor
cette variable. Si on suppose que x devie
et qu'on représente par u' la nouvelle valeu
aura $u'=ax+ah$, d'où $u'-u=ah$. En
deux membres par h, on aura $\frac{u'-u}{h}=a$, c
que le rapport de l'accroissement de l
celui de la variable est indépendant de leur
culière.
Passons à une fonction un peu plus
supposons qu'on ait $u=ax^2$; en mettant
de x, on aura $u'=a(x^2+2xh+h^2)$, et
la première équation de la seconde $u'-u=$
divisant les deux membres par h, on
$\frac{u'-u}{h}=2ax+ah$. Ici le rapport des
de la fonction et de la variable, est con
: l'une ne dépend point de la vale

ie A quantity is a function of another, when depends on that one for its value.

des conditions certaines; on dit que la première est *fonction* des autres. L'usage que nous ferons de ce mot par la suite en éclaircira la signification.

3. La quantité considérée comme changeant de grandeur, ou pouvant en changer, est appelée *variable;* et l'on donne le nom de *constante* à celle que l'on considère comme conservant toujours la même valeur dans le cours du calcul. On voit d'après cela que c'est la nature de la question qu'on se propose qui détermine quelles sont les quantités qu'on doit regarder comme variables ou comme constantes.

4. Pour éclaircir ceci, proposons-nous quelques exemples; soit $u=ax$, a étant regardé comme constante: u est une fonction de x, de l'ordre le plus simple, puisque c'est une quantité proportionnelle à cette variable. Si on suppose que x devienne $x+h$, et qu'on représente par u' la nouvelle valeur de u, on aura $u'=ax+ah$, d'où $u'-u=ah$. En divisant les deux membres par h, on aura $\frac{u'-u}{h}=a$, c'est-à-dire, que le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable est indépendant de leur valeur particulière.

Passons à une fonction un peu plus compliquée et supposons qu'on ait $u=ax^2$; en mettant $x+h$ au lieu de x, on aura $u'=a(x^2+2xh+h^2)$, et en retranchant la première équation de la seconde $u'-u=2axh+ah^2$: divisant les deux membres par h, on aura $\frac{u'-u}{h}=2ax+ah$. Ici le rapport des accroissemens de la fonction et de la variable, est composé de deux parties; l'une ne dépend point de la valeur particulière

des accroissemens, et l'autre est affectée de h. Si on conçoit que cette quantité aille en diminuant, le résultat s'approchera sans cesse de $2ax$, et n'y atteindra qu'en supposant $h=0$; en sorte que $2ax$ est la *limite* (*Alg.* 234) du rapport $\frac{u'-u}{h}$: c'est-à-dire, la valeur vers laquelle il tend à mesure que la quantité h diminue et dont il peut approcher autant qu'on le voudra.

Il est aisé de voir que la différence $u'-u$ s'anéantit toujours en même temps que h, puisque c'est l'existence seule de cette dernière quantité qui donne lieu à la première ; cependant leur rapport ne s'anéantit pas : il est de l'espèce des quantités dont nous avons fait remarquer l'existence dans le n°. 200 des Élémens d'Algèbre.

Faisons encore $u=ax^3$, nous aurons par la substitution de $x+h$, au lieu de x,

$$u'=a(x+h)^3=ax^3+3ax^2h+3axh^2+h^3;$$

en retranchant la première équation de la seconde, on trouvera $u'-u=3ax^2h+3axh^2+h^3$, et prenant les rapports des accroissemens, $\frac{u'-u}{h}=3ax^2+3axh+ah^2$.

On voit encore ici un terme indépendant de toute valeur particulière des accroissemens et vers lequel leur rapport tend sans cesse lorsque h diminue, en sorte que ce rapport a aussi une limite.

Ce premier terme ou cette limite n'est pas particulier aux fonctions que nous venons d'examiner, il se rencontre dans toute fonction en général. En s'évanouissant, les accroissemens respectifs d'une fonction et de sa variable, conservent encore le rapport dont ils se sont approchés par degrés et qui porte pour ainsi dire l'empreinte de la fonction dont il dérive, en sorte qu'il existe une dépendance qui détermine l'un par l'autre et

réciproquement. La détermination de ce rapport est l'objet du Calcul qui va nous occuper.

5. Je vais d'abord faire connoître les signes par lesquels on exprime les nouvelles relations que les notions précédentes établissent entre les grandeurs. Pour en montrer la convenance, je reprends la fonction $u=ax^3$, déjà considérée dans le n°. 4.

En y mettant $x+h$, au lieu de x, et retranchant la quantité ax^3 du résultat, on a obtenu dans l'expression

$$u'-u=3ax^2h+3axh^2+h^3,$$

le développement de la *différence* des deux états de la fonction u, ordonné suivant les puissances de l'accroissement h, qu'on suppose à la variable x; et la limite $3ax^2$ du rapport des accroissemens $u-u'$ et h ne dépend que de la considération du premier terme $3ax^2h$ de cette différence. Ce premier terme n'étant qu'une portion de la différence, nous l'appellerons *différentielle* et nous le désignerons par $\mathrm{d}u$, en nous servant de la lettre d comme d'une caractéristique; nous aurons donc dans l'exemple qui nous occupe, $\mathrm{d}u=3ax^2h$.

Pour passer de là à $3ax^2$, qui est la limite cherchée, il faudra diviser par h, et l'on obtiendra $\frac{\mathrm{d}u}{h}=3ax^2$; mais quand il s'agit d'une variable simple, comme la quantité x se change en $x'=x+h$ on a $x'-x=h$; la différence et la différentielle ne sont alors qu'une même chose: nous remplacerons donc la quantité h par le signe $\mathrm{d}x$, afin de mettre de l'uniformité dans les calculs, et nous aurons

$$\mathrm{d}u=3ax^2\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3ax^2;$$

la première expression sera la différentielle de u ou de ax^3,

et la seconde qui exprime la limite du rapport des changemens simultanés de la fonction et de la variable, prendra le nom de *coefficient différentiel*, parce que la quantité qu'elle représente n'est autre chose que le multiplicateur de la différentielle dx, dans l'expression de la différentielle du. Il suit de-là que *la limite du rapport des accroissemens, ou le coefficient différentiel, s'obtiendra en divisant la différentielle de la fonction par celle de la variable;* et réciproquement *on obtiendra la différentielle en multipliant la limite du rapport des accroissemens, ou le coefficient différentiel, par la différentielle de la variable.*

Cette remarque est importante parce qu'il y a des fonctions dont le coefficient différentiel se trouve plus facilement que la différentielle. En effet, pour parvenir immédiatement à cette dernière, *il faut écrire* $x+dx$ *au lieu de* x, *dans la fonction proposée, développer le résultat suivant les puissances de* dx, *en s'arrêtant au terme affecté de la première puissance et retrancher du résultat l'expression primitive.* On voit que cette méthode suppose qu'on sache développer la fonction proposée, ce qui peut demander des secours étrangers dont la considération des limites dispense le plus souvent.

D'après ces diverses considérations, *le Calcul différentiel sera la recherche de la limite du rapport des accroissemens simultanés d'une fonction et de la variable dont elle dépend.*

6. Il faut bien se garder de confondre la différentielle avec la différence $u'-u$. En effet, dans l'exemple du n°. 4, l'une est $3ax^2h$, et l'autre

$$3ax^2h+3axh^2+h^3;$$

mais on voit que lorsque la quantité h est très-petite, la différentielle $3ax^2h$ forme la partie la plus considérable de la différence $u'-u$, et que la différentielle s'approche de plus en plus de la différence, à mesure que h diminue. En général, *il y a d'autant moins d'erreur à prendre la differentielle pour la difference, que l'on suppose plus petite la valeur de l'accroissement de la variable.* La même conséquence se tire aussi de la considération des limites; car si le rapport des accroissemens simultanés $u'-u$ et h a pour limite une fonction p, il en approchera sans cesse; on aura $\frac{u'-u}{h}=p$, d'autant plus exactement, que l'accroissement h sera plus petit, et dans cette hypothèse $u'-u=ph$ (*).

7. Il est à propos de remarquer que lorsque le résultat de la substitution de $x+\mathrm{d}x$ sera développé suivant les puissances de $\mathrm{d}x$ dans la forme

$$U+p\,\mathrm{d}x+q\,\mathrm{d}x^2+\text{etc.}$$

le premier terme U sera la valeur primitive de la fonction proposée, puisque c'est à ce terme seul que se réduit l'expression ci-dessus quand on y fait $\mathrm{d}x=0$, ce qui suppose que x n'a pas changé.

8. Quoiqu'il soit presqu'évident que deux fonctions égales doivent avoir des différentielles égales, je crois cependant à propos d'entrer dans quelques détails à cet égard, afin qu'il ne reste aucun doute sur un principe qui reviendra souvent dans la suite.

(*) C'est sur ce principe que Léibnitz a fondé le Calcul différentiel, en regardant les différentielles comme des différences infiniment petites.

Lorsque deux fonctions sont égales entr'elles, quelle que soit la valeur de la variable dont elles dépendent, il faut que leurs développemens, ordonnés par rapport aux puissances de cette variable ou de son accroissement, soient identiques, afin qu'en les égalant il n'en résulte aucune équation qui puisse déterminer l'une ou l'autre des quantités dont on vient de parler; par conséquent si on a $u=v$, il faut qu'en substituant $x+\mathrm{d}x$ à x et en développant, on ait $u+p\mathrm{d}x+\text{etc.} =v+q\,\mathrm{d}x+\text{etc.}$ quel que soit $\mathrm{d}x$: donc $p\,\mathrm{d}x=q\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire, $\mathrm{d}u=\mathrm{d}v$.

L'inverse de cette proposition n'est pas généralement vraie, et on auroit tort d'affirmer que deux différentielles égales appartiennent à des fonctions égales. En effet, si on avoit $a+bx$, en substituant $x+\mathrm{d}x$, on obtiendroit $a+bx+b\mathrm{d}x$ et en retranchant $a+bx$, on trouveroit $b\mathrm{d}x$; résultat dans lequel il ne reste aucune trace de la constante a. La différentielle $b\mathrm{d}x$ appartient donc également à $a+bx$ ou à bx; et elle convient en général aux différens cas que présente la fonction $a+bx$, lorsqu'on donne à a toutes les valeurs possibles. On voit aisément par là que dans la différentiation d'une fonction quelconque, toutes les constantes combinées seulement par voie d'addition ou de soustraction disparoissent: à l'égard de celles qui le sont par la multiplication ou par la division, elles restent toujours comme coefficiens ou comme diviseurs.

9. Lorsque deux quantités u et x sont liées par une dépendance mutuelle, on peut dire également que u est fonction de x, ou bien que x est fonction de u, selon que l'on veut regarder u comme déterminé par x, ou x comme déterminé par u; le coefficient différentiel peut

aussi se présenter sous chacun de ces points de vue.

Lorsqu'on a $\mathrm{d}u = p\,\mathrm{d}x$, on en conclut $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = p$, quand on regarde u comme devant être déterminé par x, et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{p}$, quand on suppose x déterminé par u; dans ce dernier cas la différentielle de x est $\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\,\mathrm{d}u$.

10. Appliquons maintenant ce qui précède à la recherche des différentielles des fonctions qui se présentent dans les Elémens d'Algèbre. Ces fonctions sont des sommes, des différences, des produits, des quotiens, des puissances et des racines. Considérons premièrement le cas où l'on a plusieurs quantités dépendantes de x, jointes ensemble par addition ou par soustraction, et supposons qu'on sache trouver la différentielle de chacune de ces quantités. Soit $u+v-w$ l'expression totale; d'après ce qu'on a vu, la substitution de $x+\mathrm{d}x$, au lieu de x, doit changer

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} u + p\,\mathrm{d}x + \text{etc.} \\ v + q\,\mathrm{d}x + \text{etc.} \\ w + r\,\mathrm{d}x + \text{etc.} \end{matrix}\right.$$

et par conséquent $u+v-w$ deviendra

$$u + v - w + p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}x - r\,\mathrm{d}x + \text{etc.}$$

d'où en retranchant la fonction proposée, on tirera

$$p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}x - r\,\mathrm{d}x + \text{etc.}$$

mais $p\,\mathrm{d}x$, $q\,\mathrm{d}x$, $r\,\mathrm{d}x$ sont les différentielles propres de chacune des fonctions u, v, et w, ou $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}w$: on aura donc

$$\mathrm{d}(u + v - w) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v - \mathrm{d}w,$$

c'est-à-dire, que *la différentielle d'une fonction de* x, *composée de plusieurs termes s'obtiendra en prenant la différentielle de chaque terme avec le signe dont ce terme est affecté.*

11. Passons maintenant au produit des deux fonctions u et v: puisque u se change en $u+p\,\mathrm{d}x+$ etc. et v en $v+q\,\mathrm{d}x+$ etc. Le produit uv deviendra

$$\left.\begin{array}{l} uv+uq\,\mathrm{d}x+\text{etc.} \\ \quad +vp\,\mathrm{d}x+\text{etc.} \end{array}\right\}.$$

soustrayant la fonction primitive uv, il restera pour la différentielle $uq\,\mathrm{d}x+vp\,\mathrm{d}x$; mais $q\,\mathrm{d}x$ et $p\,\mathrm{d}x$ sont équivalens à $\mathrm{d}v$ et à $\mathrm{d}u$: donc $\mathrm{d}.uv=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u$ (*).

Je n'ai pris que les deux premiers termes des développemens de u et de v, parce que les suivans ne contenant que des puissances de $\mathrm{d}x$ supérieures à la première, en auroient donné de semblables dans le produit, et qu'on ne sauroit admettre dans la différentielle d'après sa définition. Il est à propos de bien saisir cette remarque; car dans tout ce qui va suivre, nous n'aurons égard, par la même raison, qu'aux deux termes $u+p\mathrm{d}x$.

La formule $\mathrm{d}.uv=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u$, nous apprend que *pour avoir la différentielle du produit de deux fonctions, il faut multiplier chacune par la différentielle de l'autre, et ajouter ensemble les deux résultats.*

Si on divise les deux membres de l'équation

$$\mathrm{d}.uv=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u$$

(*) Lorsque l'on trouve un point après la caractéristique d, cela veut dire qu'elle porte sur tout ce qui la suit immédiatement, ainsi $d.uv$ est la même chose que $d(uv)$, et $d.x^n$ la même chose que $d(x^n)$.

par la fonction primitive uv, on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}.uv}{uv}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}v}{v};$$

ce qui nous conduira facilement à l'expression de la différentielle d'un produit composé d'autant de facteurs qu'on voudra. Pour cela supposons que $v=ts$, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{\mathrm{d}.ts}{ts}=\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

et par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}.uts}{uts}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

on trouvera de la même manière que

$$\frac{\mathrm{d}.uts\,r\ldots.\text{etc.}}{uts\,r\ldots.\text{etc.}}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}s}{s}+\frac{\mathrm{d}r}{r}+\text{etc.}$$

Si on fait évanouir les dénominateurs dans l'équation

$$\frac{\mathrm{d}.uts}{uts}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

on trouvera $\mathrm{d}.uts=ts\,\mathrm{d}u+us\,\mathrm{d}t+ut\,\mathrm{d}s$; et on verra aisément que *quel que soit le nombre des facteurs, la différentielle de leur produit sera égale à la somme des produits de la différentielle de chacun d'eux, multipliée par tous les autres.*

12. On obtient la différentielle de $\frac{u}{v}$ en faisant $\frac{u}{v}=t$; car il vient alors $u=vt$, et d'après ce qui précède (8), $du=v\,dt+t\,dv$; prenant la valeur de $\mathrm{d}t$ et substituant au lieu de t, la fraction $\frac{u}{v}$, on aura $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{v}-\frac{u\,\mathrm{d}v}{v^2}$, *

ou en réduisant au même dénominateur

$$\mathrm{d}t = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2},$$

d'où il résulte que *pour trouver la différentielle d'une fraction, il faut multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur, retrancher de ce produit celui du numérateur par la différentielle du dénominateur, et diviser le tout par le quarré du dénominateur.*

Quand le numérateur de la fraction proposée est constant, u ne dépendant point de x, n'a point de différentielle, c'est-à-dire, que $\mathrm{d}u = 0$, et il vient seulement

$$\mathrm{d}t = -\frac{u\,\mathrm{d}v}{v^2}.$$

13. La fonction x^n désignant, lorsque n est un nombre entier positif le produit d'un nombre n de facteurs égaux à x, on déduira du n°. 11.

$$\frac{\mathrm{d}.x^n}{x^n} = \frac{\mathrm{d}.xxxx\ldots.}{xxxx\ldots.}$$
$$= \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}x}{x} + \ldots.$$

Le nombre des facteurs du premier membre étant n, le second sera composé d'un pareil nombre de termes égaux à $\frac{\mathrm{d}x}{x}$, on aura donc

$$\frac{\mathrm{d}.x^n}{x^n} = \frac{n\,\mathrm{d}x}{x},$$

où l'on conclura $\mathrm{d}.x^n = nx^{n-1}\mathrm{d}x$.

Si le nombre n est fractionnaire, en le représentant par $\frac{p}{q}$, on fera $x^{\frac{p}{q}} = z$, et l'on aura

$$x^p = z^q, \qquad \mathrm{d}.x^p = \mathrm{d}.z^q;$$

mais p et q étant des nombres entiers, la formule ob-

tenue ci-dessus donnera

$$\mathrm{d}.x^p = p\,x^{p-1}\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}.z^q = q\,z^{q-1}\,\mathrm{d}z,$$

et par conséquent (8)

$$p x^{p-1}\,\mathrm{d}x = q z^{q-1}\,\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}z = \frac{p}{q}\,\frac{x^{p-1}\,\mathrm{d}x}{z^{q-1}} \;*$$

$$\mathrm{d}z = \frac{p}{q}\,\frac{x^{p-1}\,\mathrm{d}x}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui revient encore à $\mathrm{d}.x^n = n x^{n-1}\,\mathrm{d}x$, n étant égal à $\frac{p}{q}$. Enfin le nombre n étant négatif on a $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$; d'où on tire par la seconde formule du n°. 12

$$\mathrm{d}.x^{-n} = \mathrm{d}.\frac{1}{x^n} = \frac{-\mathrm{d}.x^n}{x^{2n}};$$

et comme d'après ce qui précède $\mathrm{d}.x^n = n x^{n-1}\mathrm{d}x$, dans tous les cas où n est positif, on a donc

$$\mathrm{d}.x^{-n} = \frac{-n x^{n-1}\mathrm{d}x}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}\mathrm{d}x.$$

De cette énumération nous conclurons que *pour différentier une puissance quelconque d'une quantité variable, il faut la multiplier par son exposant; diminuer ensuite cet exposant d'une unité, et multiplier le résultat par la différentielle de la variable* (*).

14. Les règles énoncées dans les n°s. 10, 11, 12, 13,

(*) J'aurois pu conclure immédiatement cette règle du développement du binome $(x+\mathrm{d}x)^n$, puisque ce développement $x^n + n x^{n-1}\mathrm{d}x$ + etc. si on en retranche x^n, le reste sera $n x^{n-1}\mathrm{d}x$; mais je n'ai pas donné la démonstration de la formule du binome. Le calcul différentiel en fournit une très-simple

suffisent pour différentier toutes les fonctions où la variable n'est engagée que par addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances, entières ou fractionnaires, positives ou négatives. Les fonctions qui résultent des opérations algébriques se nomment par cette raison *fonctions algébriques*. Nous allons en différentier quelques-unes pour montrer l'application des règles.

Soit 1°. $u=a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x}$; en prenant séparément la différentielle de chaque terme de cette fonction, le premier disparoît parce qu'il est constant (8), le second mis sous la forme $bx^{\frac{1}{2}}$ donne par l'application de la règle du n°. 13, $\frac{1}{2}bx^{\frac{1}{2}-1}\,dx$, ou $\frac{b\,dx}{2\sqrt{x}}$; le troisième $-\frac{c}{x}$ conduit à $-\frac{c\,dx}{x^2}$ (13): réunissant les résultats partiels, on trouvera

$$du=\left(\frac{b}{2\sqrt{x}}+\frac{c}{x^2}\right)dx \text{ et } \frac{du}{dx}=\frac{b}{2\sqrt{x}}+\frac{c}{x^2}.$$

2°. $u=a+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{e}{x^2}$: en écrivant cette fonction comme il suit

$$u=a+bx^{-\frac{2}{3}}-cx^{-1-\frac{1}{3}}+ex^{-2},$$

l'application de la règle du n°. 13, donnera

$$du=-\frac{2}{3}\frac{b\,dx}{x^{\frac{5}{3}}}+\frac{4}{3}\frac{c\,dx}{x^{\frac{7}{3}}}-\frac{2e\,dx}{x^3}$$

fractionnaires par des

$$x \quad -\frac{2e\,dx}{x^3}.$$

15. Les exemples ci-dessus ne comprennent que des monomes, mais il y a des fonctions qui ne peuvent, sans un développement préalable, être décomposées en termes de cette forme; telle est la fonction $u=(a+bx^m)^n$. Pour y appliquer la règle du n°. 13, on regardera le binome $a+bx^m$, comme une fonction particulière z, et en observant que la différentielle de z^n est généralement $nz^{n-1}dz$, on en conclura

$$du=n\times(a+bx^m)^{n-1}\times d(a+bx^m);$$

mais on trouvera aussi que

$$d(a+bx^m)=d.bx^m=mbx^{m-1}dx:$$

il viendra donc

$$du=nmbx^{m-1}(a+bx^m)^{n-1}dx.$$

Si l'on avoit $u=\sqrt{a+bx+cx^2}$, on regarderoit le trinome $a+bx+cx^2$ comme une fonction particulière z, et comme la différentielle de $\sqrt{z}$ ou de $z^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$, ou $\frac{dz}{2\sqrt{z}}$, il en résulteroit

$$du=\frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{bdx+2cxdx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Comme on a souvent besoin de différentier des radicaux du second degré, nous ferons observer, d'après la formule $\frac{dz}{2\sqrt{z}}$, que *la différentielle d'un radical du second degré s'obtient en divisant celle de la quantité qui se trouve sous le signe, par le double du radical.*

16. La règle donnée (11), pour différentier les

produits étant appliquée à la fonction

$u = x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$ conduit à

$$du = dx(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} + x\sqrt{a^2-x^2}.d(a^2+x^2) + x(a^2+x^2)\,d\sqrt{a^2-x^2}.$$

Les deux derniers termes de cette expression renferment des opérations qui ne sont qu'indiquées, mais qui s'effectuent successivement, en observant que

$$d(a^2+x^2) = d.x^2 = 2x\,dx,$$

$$d\sqrt{a^2-x^2} = \frac{d(-x^2)}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

et on trouve ensuite

$$du = \left\{(a^2+x^2)\sqrt{(a^2-x^2)} + 2x^2\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right\} dx;$$

réduisant tous les termes au même dénominateur, on a enfin

$$du = \frac{(a^4+a^2x^2-4x^4)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

La règle concernant la différentiation des fractions appliquée à la fonction $u = \frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}$, donne immédiatement

$$du = \frac{(a^4+a^2x^2+x^4)d(a^2-x^2) - (a^2-x^2)d(a^4+a^2x^2+x^4)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}$$

d'où on tire

$$du = \frac{-2x(2a^4+2a^2x^2-x^4)\,dx}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}.$$

Nous terminerons ces exemples par la fonction

$$u=\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^3},$$

qui renferme plusieurs opérations algébriques à effectuer successivement; pour en faciliter la différentiation, nous ferons

$$\frac{b}{\sqrt{x}}=y, \qquad \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}=z,$$

et nous aurons

$$u=\sqrt[4]{(a-y+z)^3}=(a-y+z)^{\frac{3}{4}}.$$

La règle du n°. 13 donnera

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \tfrac{3}{4}(a-y+z)^{\frac{3}{4}-1}\mathrm{d}(a-y+z) \\ &= \tfrac{3}{4}(a-y+z)^{-\frac{1}{4}}(-\mathrm{d}y+\mathrm{d}z) \\ &= \frac{-3\,\mathrm{d}y+3\,\mathrm{d}z}{\sqrt[4]{a-y-z}}; \end{aligned}$$

nous trouverons ensuite

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}.\frac{b}{\sqrt{x}}=-b\,\frac{\mathrm{d}.\sqrt{x}}{x}=\frac{-b\,\mathrm{d}x}{2x\sqrt{x}};$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= \mathrm{d}(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}=\tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}-1}\mathrm{d}(c^2-x^2) \\ &= \tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}x\times-2x\mathrm{d}x=\frac{-4x\,\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}}; \end{aligned}$$

substituant ces valeurs et celles de y et de z dans l'expression de $\mathrm{d}u$, il viendra

$$\mathrm{d}u=\left\{\frac{\frac{3b}{2x\sqrt{x}}-\frac{4x}{\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{4\sqrt[4]{a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}\right\}\mathrm{d}x.$$

Des

Des différentiations successives.

17. Le coefficient différentiel étant une nouvelle fonction de x peut être soumis à la différentiation, et donner, par la limite du rapport de son accroissement à celui de la variable x, son propre coefficient différentiel qui sera aussi une fonction de x. En faisant ainsi succéder des différentielles les unes aux autres, on déduit de la fonction proposée une suite de limites ou de coefficiens différentiels, que l'on distingue en ordres d'après le nombre de différentiations qu'il a fallu effectuer pour les obtenir.

Si l'on fait $\frac{du}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, etc.

p représentera le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction proposée, q celui de la fonction p, ou le coefficient du second ordre de la fonction proposée, r celui de la fonction q, ou le coefficient du troisième ordre de la fonction proposée, etc. et il faut observer que les coefficiens q, r, etc. se tirent des différentielles successives de du, prises en y regardant l'accroissement dx comme une constante. Nous marquerons ces différentielles ainsi :

$$d(du)=ddu=d^2u, \qquad d(d^2u)=d^3u. \text{ etc.}$$

L'exposant qui affecte la caractéristique d indique une opération répétée, et non pas une puissance de la lettre d qui n'est jamais considérée comme une quantité, mais seulement comme un signe. Cela posé, les équations

$$\frac{du}{dx}=p, \qquad \frac{dp}{dx}=q, \qquad \frac{dq}{dx}=r, \text{ etc.}$$

donneront

$$du=p\,dx, \quad dp=q\,dx, \quad dq=r\,dx, \text{ etc.}$$

en différentiant de nouveau la première, sans y faire

varier dx, elle deviendra $d^2u=dp\,dx$, et mettant pour dp sa valeur tirée de la seconde, on aura $d^2u=q\,dx^2$ (*), d'où $q=\frac{d^2u}{dx^2}$; différentiant de nouveau l'équation $d^2u=q\,dx^2$, on trouvera $d^3u=dq\,dx^2$, et comme $dq=r\,dx$, il en résultera $d^3u=r\,dx^3$, ou $r=\frac{d^3u}{dx^3}$: on aura donc $p=\frac{du}{dx}$, $q=\frac{d^2u}{dx^2}$, $r=\frac{d^3u}{dx^3}$, etc.

18. Si la fonction proposée étoit, par exemple, ax^n, on trouveroit $d.ax^n=nax^{n-1}dx$ (13); les facteurs na et dx étant regardés comme constans dans la différentielle première $nax^{n-1}dx$, il suffit (8) pour obtenir la différentielle seconde, de différentier x^{n-1} et de multiplier le résultat par $na\,dx$; mais $d.x^{n-1}=(n-1)x^{n-2}dx$: on aura donc $d^2.ax^n=n(n-1)ax^{n-2}dx^2$.

On trouvera d'une manière semblable

$d^3.ax^n=n(n-1)(n-2)ax^{n-3}dx^3$

$d^4.ax^n=n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}dx^4$

etc.

et les coefficiens différentiels auront les valeurs suivantes:

$$\frac{d.ax^n}{dx}=nax^{n-1}$$

$$\frac{d^2.ax^n}{dx^2}=n(n-1)ax^{n-2}$$

$$\frac{d^3.ax^n}{dx^3}=n(n-1)(n-2)ax^{n-3}$$

$$\frac{d^4.ax^n}{dx^4}=n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}$$

etc.

(*) Il faut bien prendre garde que les expressions dx^2, dx^3..... sont équivalentes à $(dx)^2$, $(dx)^3$...., et non pas à $d.x^2$, $d.x^3$.... (Voyez la note, page 69).

On remarquera sans peine que dans le cas où l'exposant n est un nombre entier positif, la fonction ax^n n'a qu'un nombre limité de différentielles dont la plus élevée est $d^n.ax^n = n(n-1)(n-2)....2.1.a\,dx^n$; expression qui n'est plus susceptible de différentiation puisqu'elle ne contient plus de variables : on aura donc alors pour le dernier coefficient différentiel,

$$\frac{d^n.ax^n}{dx^n} = n(n-1)(n-2)....1.a,$$

c'est-à-dire, une quantité constante.

19. Cette remarque donne un moyen fort simple pour développer en série, suivant les puissances entières de x, toute fonction dont on peut obtenir les différentielles successives. Soit u cette fonction et supposons que

$$u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

en différentiant cette expression, on trouvera

$$\frac{du}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 1.2.3D + 2.3.4Ex + \text{etc.}$$

etc.

Si on a d'ailleurs en x l'expression des quantités

$$u, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.}$$

en désignant par U, U', U'', U''', etc. ce que deviennent ces quantités lorsqu'on fait $x = 0$, on tirera des équa-

tions ci-dessus, en y supposant aussi $x=0$,

$$A=U,\ B=\frac{1}{1}U',\ C=\frac{1}{1.2}U'',\ D=\frac{1}{1.2.3}U''', \text{ etc.}$$

d'où $$u=U+U'\frac{x}{1}+U''\frac{x^2}{1.2}+U'''\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

20. Si nous prenons $u=(a+x)^n$, nous aurons,

$$\frac{du}{dx}=n(a+x)^{n-1},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=n(n-1)(a+x)^{n-2},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}=n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3}, \text{ etc.}$$

et faisant $x=0$, nous obtiendrons

$$U=a^n,\quad U'=na^{n-1},\quad U''=n(n-1)a^{n-2},$$

$$U'''=n(n-1)(n-2)a^{n-3}, \text{ etc.}$$

d'où nous conclurons

$$(a+x)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}x^3+\text{etc.}$$

Les principes de la différentiation ayant été donnés ci-dessus, sans supposer le développement de $(a+x)^n$, nous pouvons le regarder maintenant comme prouvé pour tous les cas où l'exposant n est entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

En mettant, par exemple, les expressions

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{a^2+x^2},\\ \sqrt[3]{(a^2-x^2)^2},\\ \frac{1}{a+x},\\ \frac{1}{\sqrt[4]{a^4+x^4}}\end{array}\right\} \text{ sous la forme } \left\{\begin{array}{l}a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},\\ a^{\frac{4}{3}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}},\\ a^{-1}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-1},\\ a^{-1}\left(1+\frac{x^4}{a^4}\right)^{-\frac{1}{4}},\end{array}\right.$$

on en obtiendra le développement suivant le procédé indiqué dans le n°. 164 des Elémens d'algèbre.

21. Le même moyen va nous conduire à exprimer par les coefficiens différentiels le développement général de la valeur que prend la fonction u, quand on y substitue $x+h$ au lieu de x. En effet, la fonction u, lorsqu'elle se changera en u' par cette substitution, pourra être regardée comme une fonction de h; et on aura par le n° précédent

$$u'=U+U'\frac{h}{1}+U''\frac{h^2}{1.2}+U'''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

si U, U', U'', U''', etc.

désignent ce que deviennent

$$u', \quad \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h}, \quad \frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}h^3}, \text{ etc.}$$

lorsqu'on y fait $h=0$.

Il est d'abord visible que u' redevient u lorsqu'on y fait $h=0$, et qu'on a par conséquent $U=u$; mais de plus les coefficiens différentiels ci-dessus, formés en regardant h comme variable et x comme constante, sont les mêmes que ceux qu'on trouveroit en traitant x comme variable et h comme constante; pour le prouver soit $x+h=x'$, la fonction u' sera composée en x' comme la fonction u l'est en x: on en conclura $\mathrm{d}u'=p'\mathrm{d}x'$, p' étant une fonction de x', et $\mathrm{d}x'=\mathrm{d}(x+h)$. Si l'on ne fait varier que h, on aura

$$\mathrm{d}x'=\mathrm{d}h, \quad \mathrm{d}u'=p'\mathrm{d}h \text{ et } \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h}=p'.$$

En ne faisant varier que x, on obtiendra

$$\mathrm{d}x'=\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}u'=p'\mathrm{d}x \text{ et } \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}=p',$$

donc $\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h}=\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}$. La fonction p' étant elle-même une

fonction de x', on aura encore

$$\frac{dp'}{dh}=\frac{dp'}{dx}, \text{ d'où } \frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u'}{dx^2},$$

et en général

$$\frac{d^mu'}{dh^m}=\frac{d^mu'}{dx^m}.$$

Cela posé, lorsque $h=0$, u' se changeant en u, il en résultera

$$U'=\frac{du}{dx}, \qquad U''=\frac{d^2u}{dx^2}, \qquad U'''=\frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.}$$

$$\text{et} \quad u'=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Cette formule, qu'on doit regarder comme la base du Calcul différentiel, est connue sous le nom de *Théorème de Taylor*, parce que c'est ce Géomètre anglois qui l'a donnée le premier (*).

(*) Je rapporterai encore ici une démonstration de cette formule. Ayant prouvé comme ci-dessus que

$\frac{du'}{dh}=\frac{du'}{dx}$, si l'on fait $u'=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{etc.}$

et qu'on suppose que les coefficiens A, B, C, D, etc, ne contiennent pas h, ils ne dépendront que de la variable x, et des quantités constantes qui entrent dans la fonction proposée; on aura donc

$$\frac{du'}{dh}=B+2Ch+3Dh^2+\text{etc.}$$

$$\frac{du'}{dx}=\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}h+\frac{dC}{dx}h^2+\text{etc.}$$

égalant ces deux résultats terme à terme, on trouvera

$$B=\frac{dA}{dx}, \qquad C=\frac{1}{2}\frac{dB}{dx}, \qquad D=\frac{1}{3}\frac{dC}{dx}, \text{ etc.}$$

or $A=u$, donc

$$B=\frac{du}{dx}, \qquad C=\frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}, \qquad D=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.}$$

Cette démonstration m'a été présentée à un exercice public dans une des principales maisons d'éducation de Paris.

Elle contient implicitement le développement du binome, car si l'on suppose $u=x^n$, u' deviendra $(x+h)^n$, et l'on aura

$$(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}\frac{h}{1}+n(n-1)x^{n-2}\frac{h^2}{1.2}$$
$$+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

22. La formule de *Taylor* montre aussi que les divers coefficiens différentiels ont encore la propriété remarquable de former, lorsqu'on les divise respectivement par les produits

$$1,\quad 1.2,\quad 1.2.3,\ \text{etc.}$$

les multiplicateurs de puissances de l'accroissement h, dans le développement complet de la différence

$$u'-u=\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

De la différentiation des fonctions transcendantes.

23. Les fonctions qui ne sont pas comprises dans l'énumération que nous avons faite au n°. 14, se nomment transcendantes. La fonction exponentielle $u=a^x$ est la plus simple de ce genre. Lorsqu'on y substitue $x+dx$ au lieu de x, la différence devient

$$a^{x+dx}-a^x=a^x(a^{dx}-1),$$

pour la développer suivant les puissances de dx, je ferai $a=1+b$, et j'aurai

$$a^{dx}=(1+b)^{dx}=1+\frac{dx}{1}.b+\frac{dx(dx-1)}{1.2}b^2$$
$$+\frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1.2.3}b^3+\text{etc.}$$

d'où je tirerai

$$a^{\mathrm{d}x}-1=\left\{\frac{\mathrm{d}x}{1}b+\frac{\mathrm{d}x(\mathrm{d}x-1)}{1.2}b^2+\frac{\mathrm{d}x(\mathrm{d}x-1)(\mathrm{d}x-2)}{1.2.3}b^3+\text{etc.}\right\},$$

ordonnant par rapport à $\mathrm{d}x$, il viendra

$$a^{\mathrm{d}x}-1=\mathrm{d}x\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{etc.}\right)+\text{etc.}$$

remettant pour b sa valeur $a-1$, il en résultera

$$\mathrm{d}.a^x=a^x\,\mathrm{d}x\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\text{etc.}\right);$$

ainsi prenant

$$k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^5}{3}+\text{etc.}$$

on aura $\mathrm{d}.a^x=k\,a^x\mathrm{d}x$. Telle est la forme de la différentielle de la fonction proposée, et nous trouverons bientôt une nouvelle expression du nombre constant k.

24. Il est visible que

$$\mathrm{d}^2.a^x=k\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}.a^x=k^2a^x\mathrm{d}x^2$$
$$\mathrm{d}^3.a^x=k^3a^x\mathrm{d}x^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{d}^n.a^x=k^na^x\mathrm{d}x^n,$$

et il suit de là que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=k\,a^x,\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=k^2a^x,\quad \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}=k^3a^x,\ \text{etc.}$$

Faisant $x=0$, la fonction u et ses coefficiens différentiels deviennent

$$U=1,\quad U'=k,\quad U''=k^2,\quad U'''=k^3,\ \text{etc.}$$

on obtiendra donc (19)

$$a^x=1+\frac{kx}{1}+\frac{k^2x^2}{1.2}+\frac{k^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

25. Nous voici donc parvenus au développement de la fonction a^x, et il nous servira pour reconnoître de quelle quantité la série représentée par k tire son origine.

Si l'on suppose $x=1$, il viendra

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Cette série étant peu propre à faire connoître a au moyen de k, nous chercherons la valeur que doit avoir a, lorsque $k=1$; et en la désignant par e, nous aurons

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

En poussant cette série jusqu'à dix termes, et les évaluant tous en décimales, on trouvera

$$e=2{,}7182818.$$

Cela posé, puisque cette valeur répond à $k=1$, il s'en suit que

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

que de même

$$e^k=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

et que par conséquent $e^k=a$. Si on prend les logarithmes de part et d'autre, on obtiendra

$$kle=la, \text{ ou } k=\frac{la}{le};$$

on aura donc par là

$$\mathrm{d}.a^x=k\,a^x\mathrm{d}x=\frac{la}{le}\,a^x\mathrm{d}x.$$

26. Nous pouvons à présent parvenir à la différentielle de la fonction logarithmique. En effet, si l'on

par M le logarithme de e, pris sur cette base,

$$l(1+z)=M\left\{z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\text{etc.}\right\}(*).$$

29. La série du second membre n'est assez convergente (*Alg.* 236) pour être employée au Calcul des logarithmes, que lorsque z est une fraction; mais on a trouvé des moyens de la transformer en d'autres qui s'appliquent aux différens cas avec plus ou moins d'avantage. Nous ne saurions faire connoître ici ces dernières, sans nous écarter de notre objet; on les trouve dans le *Complément des Elémens d'Algèbre*, et nous y reviendrons dans la suite. Pour le présent nous nous bornerons à faire remarquer que puisque

$$a+s=a\left(1+\frac{s}{a}\right),\quad l(a+s)=la+l\left(1+\frac{s}{a}\right),$$

on aura

$$l(a+s)=la+M\left\{\frac{s}{a}-\frac{s^2}{2a^2}+\frac{s^3}{3a^3}-\frac{s^4}{4a^4}+\text{etc.}\right\},$$

formule dont il est facile de concevoir l'usage pour obtenir le logarithme de $a+s$, lorsqu'on connoît celui de a.

(*) On aura remarqué sans doute que l'équation $k=\frac{la}{le}$, du n°. 25, jointe à l'expression du n°. 23

$$k=\frac{(a-1)}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{etc.}$$

conduit à

$$la=le\left\{\frac{(a-1)}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\text{etc.}\right\};$$

et en faisant $a=1+z$, on retrouvera le développement obtenu ci-dessus.

Il faut observer aussi que le module M s'obtient en calculant le logarithme d'un même nombre dans le système qu'on veut adopter, et dans le système Népérien, et en prenant le rapport des deux résultats (27). On a trouvé de cette manière que pour passer des logarithmes Népériens aux logarithmes ordinaires (ou de Briggs), il faut multiplier les premiers par le nombre

$$M = 0{,}434294482,$$

et que réciproquement, pour revenir aux logarithmes Népériens, il faut diviser les logarithmes ordinaires par ce nombre, ou les multiplier par le nombre

$$\frac{1}{0{,}43429417} = 2{,}302585093.$$

30. Je vais donner quelques exemples de l'application des règles de la différentiation des fonctions logarithmiques; mais pour plus de simplicité je supposerai dorénavant que les logarithmes sont Népériens, à moins que je n'avertisse spécialement du contraire.

Soit 1°. $u = l\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$, en faisant $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = z$,

on aura $du = \frac{dz}{z}$; mais

$$dz = \frac{dx\sqrt{a^2+x^2} - \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} = \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc $du = \frac{a^2dx}{x(a^2+x^2)}$.

2°. $u = l\left\{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right\}$; on fera

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = y, \qquad \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} = z,$$

ce qui donnera

$$u=l\left(\frac{y}{z}\right)=ly-lz, \qquad du=\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z};$$

mais on a

$$dy=\frac{dx}{2\sqrt{1+x}}-\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}=\frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\}$$
$$=-\frac{z\,dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$dz=\frac{dx}{2\sqrt{1+x}}+\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}=\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\}$$
$$=\frac{y\,dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$

d'où on tire

$$\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}=\frac{-z\,dx}{2y\sqrt{1-x^2}}-\frac{y\,dx}{2z\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{-(y^2+z^2)\,dx}{2yz\sqrt{1-x^2}};$$

et en observant que

$$y^2+z^2=4, \qquad yz=2x,$$

on trouvera enfin $du=-\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Cet exemple est remarquable par les réductions qu'éprouve la différentielle et par sa simplicité, eu égard à la fonction dont elle dérive; il sera facile maintenant d'effectuer le calcul des exemples suivans, dont nous ne donnerons que les résultats.

3°. $u = l\{x + \sqrt{1+x^2}\}$; $\quad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

4°. $u = \frac{1}{\sqrt{-1}} l\{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\}$; $\quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5°. $u = l\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right\}^{\frac{1}{2}}$; $\quad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

6°. Si on avoit $u = (lx)^n$, en faisant $lx = z$, on trouveroit

$$(lx)^n = z^n \qquad d.z^n = nz^{n-1}dz;$$

et remettant au lieu de z et de dz, leurs valeurs, il viendroit

$$d.(lx)^n = n(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}.$$

7°. Soit enfin $u = l.lx$, c'est-à-dire, le logarithme du logarithme de x; posant comme ci-dessus $lx = z$, on aura d'abord

$$u = lz, \qquad du = \frac{dz}{z}, \qquad dz = d.lx = \frac{dx}{x},$$

d'où on déduira ensuite $du = \frac{dx}{x\,lx}$.

31. La considération des logarithmes facilite beaucoup la différentiation des formules exponentielles lorsqu'elles sont compliquées.

1°. Soit par exemple $u = z^y$, z et y étant deux fonctions quelconques de x, en prenant le logarithme de chaque membre, on aura $lu = y\,lz$, et différentiant ensuite, on obtiendra

$$\frac{du}{u} = dy\,lz + y\,d.lz \text{ (11, 27), ou}$$
$$= dy\,lz + y\frac{dz}{z}$$

et de là

$$du=u\left(dy\,lz+y\frac{dz}{z}\right),\qquad d.z^y=z^y\left(dy\,lz+y\frac{dz}{z}\right).$$

2°. Soit $u=a^{b^x}$: on fera $b^x=y$, et on aura

$$u=a^y,\qquad du=a^y dy\,la\ (24);$$

mais $dy=d.b^x=b^x dx\,lb$: donc

$$du=a^{b^x}b^x dx\,la\,lb.$$

4°. Soit $u=z^{t^s}$, z, t et s étant des fonctions de x; on fera $t^s=y$, il viendra

$$u=z^y,\qquad du=z^y\left(dy\,lz+\frac{y\,dz}{z}\right);$$

$$dy=t^s\left(ds\,lt+\frac{s\,dt}{t}\right),$$

et par conséquent

$$du=z^{t^s}t^s\left(ds\,lt\,lz+\frac{s\,dt\,lz}{t}+\frac{dz}{z}\right),$$

au moyen de ces formules on trouvera facilement la différentielle d'une fonction exponentielle quelconque.

32. Les sinus, les cosinus, les tangentes, et les autres lignes trigonométriques, considérées par rapport à l'arc de cercle dont elles dépendent, sont aussi des fonctions transcendantes; on les nomme assez ordinairement *fonctions circulaires*. Nous supposerons pour plus de simplicité que le rayon soit égal à l'unité.

En substituant $x+dx$, pour x, dans la fonction $\sin x$, il vient (*Trig.* 11)

$$\sin(x+dx)=\sin x\cos dx+\cos x\sin dx,$$

d'où

d'où on tire pour la différence

$$\sin(x+\mathrm{d}x)-\sin x=$$
$$\sin x\cos\mathrm{d}x+\cos x\sin\mathrm{d}x-\sin x=$$
$$\sin x(\cos\mathrm{d}x-1)+\cos x\sin\mathrm{d}x.$$

Il faudroit maintenant développer, suivant les puissances de l'accroissement $\mathrm{d}x$, le dernier membre de cette équation; mais on peut sans cela parvenir à la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, ainsi qu'on va le voir. En prenant le rapport de ces accroissemens, on trouvera

$$\frac{\sin(x+\mathrm{d}x)-\sin x}{\mathrm{d}x}=\sin x\frac{(\cos\mathrm{d}x-1)}{\mathrm{d}x}+\cos x\frac{\sin\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x};$$

si l'on fait attention que

$$(\sin\mathrm{d}x)^2=1-(\cos\mathrm{d}x)^2=$$
$$(1+\cos\mathrm{d}x)(1-\cos\mathrm{d}x),$$

et que par conséquent

$$1-\cos\mathrm{d}x=\frac{(\sin\mathrm{d}x)^2}{1+\cos\mathrm{d}x},$$

on aura

$$\frac{\sin(x+\mathrm{d}x)-\sin x}{\mathrm{d}x}=\sin x\frac{\sin\mathrm{d}x}{1+\cos\mathrm{d}x}\frac{\sin\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+\cos x\frac{\sin\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$$
$$=(\sin x\frac{\sin\mathrm{d}x}{1+\cos\mathrm{d}x}+\cos x)\frac{\sin\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}.$$

On passera aux limites en cherchant ce que deviennent les deux facteurs du second membre lorsque l'accroissement $\mathrm{d}x$ s'évanouit. Dans ce cas, $\sin\mathrm{d}x=0$, $\cos\mathrm{d}x=1$, et le premier facteur se réduit à $\cos x$.

Le facteur $\frac{\sin\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$ tend sans cesse vers l'unité; car

de $\text{tang}\,A=\frac{\sin A}{\cos A}$, on déduit $\frac{\sin A}{\text{tang}\,A}=\cos A$; et puisque $\cos A=1$, lorsque $A=0$, l'unité sera la limite du rapport entre le sinus et la tangente quand l'arc s'évanouit; or il est visible que l'arc étant moindre que la tangente, et plus grand que le sinus, il s'ensuit qu'à plus forte raison son rapport avec le sinus tend sans cesse vers l'unité.

On aura donc, en vertu de ces remarques,

$$\frac{\text{d}.\sin x}{\text{d}x}=\cos x, \text{ ou } \text{d}.\sin x=\text{d}x\cos x.$$

33. Cette différentielle obtenue, les autres s'en déduisent sans peine; car on a

1°. $\cos x=\sin(1^q-x)$, $\text{d}.\cos x=\text{d}.\sin(1^q-x)$; mais, par ce qui précède,

$$\text{d}.\sin(1^q-x)=\text{d}(1^q-x)\cos(1^q-x)$$
$$=-\text{d}x\cos(1^q-x),$$

et $\cos(1^q-x)=\sin x$: donc

$$\text{d}.\cos x=-\text{d}x\sin x.$$

2°. Puisque $\text{sin vers}.\,x=1-\cos x$, on aura

$$\text{d}.\text{sin vers}.\,x=-\text{d}.\cos x=\text{d}x\sin x.$$

3°. $\text{tang}.\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$$\text{d}.\text{tang}\,x=\frac{\cos x\,\text{d}.\sin x-\sin x\,\text{d}.\cos x}{\cos x^2}\,(1^q)$$
$$=\frac{(\cos x^2+\sin x^2)\,\text{d}x}{\cos x^2};$$

mais $\cos x^2+\sin x^2=1$: donc

$$\text{d}.\text{tang}\,x=\frac{\text{d}x}{\cos x^2}.$$

4°. $\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}$,

$$\mathrm{d}.\cot x = -\frac{\mathrm{d}.\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tang} x^2 \cos x^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin x^2},$$

en mettant pour $\operatorname{tang} x$ sa valeur.

5°. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$,

$$\mathrm{d}.\sec x = -\frac{\mathrm{d}.\cos x}{\cos x^2} = \frac{\mathrm{d}x \sin x}{\cos x^2} = \mathrm{d}x \operatorname{tang} x \sec x,$$

puisque $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tang} x$ et $\frac{1}{\cos x} = \sec x$.

6°. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

$$\mathrm{d}.\operatorname{cosec} x = -\frac{\mathrm{d}.\sin x}{\sin x^2} = -\frac{\mathrm{d}x \cos x}{\sin x^2} = -\mathrm{d}x \cot x \operatorname{cosec} x.$$

34. Avec ces formules, on peut trouver la différentielle de toute expression renfermant des sinus, cosinus, tangentes, etc. il faudra pour cela différentier en regardant ces quantités comme des fonctions particulières, et mettre au lieu de leurs différentielles les résultats ci-dessus : nous n'en donnerons qu'un seul exemple, savoir $u = \cos x^{\sin x}$. On fera

$$\cos x = z, \qquad \sin x = y;$$

on aura $u = x^y$ et

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}.x^y = x^y \left(\mathrm{d}y \mathrm{l}z + \frac{y\,\mathrm{d}z}{z} \right) \quad (31)$$

$$= \mathrm{d}x \cos x^{\sin x} \left(\cos x \mathrm{l}.\cos x - \frac{\sin x^2}{\cos x} \right).$$

35. Nous avons traité les sinus, cosinus etc. comme des fonctions de l'arc ; regardons à présent l'arc suc-

cessivement comme une fonction de son sinus, de son cosinus, etc. et cherchons-en la différentielle sous ces divers points de vue. Pour cela supposons que x soit la fonction proposée, et u la variable dont cette fonction dépend ; 1°. l'équation $\mathrm{d}.\sin x = \mathrm{d}x\cos x$, à cause de $\sin x = u$ et $\cos x = \sqrt{1-u^2}$, donne $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x\sqrt{1-u^2}$ et par conséquent $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$: telle est la valeur de la différentielle de l'arc exprimée par le sinus et par sa différentielle.

Si on vouloit exprimer la différentielle de l'arc par son cosinus, il faudroit partir de l'équation

$$\mathrm{d}.\cos x = -\mathrm{d}x\sin x$$

qui donne, en faisant $\cos x = u$,

$$\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x\sqrt{1-u^2} \text{ ou } \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Pour passer de là au sinus verse on feroit $u = 1 - y$, puisque $\cos x = 1 - \text{sin ver.}\, x$, on auroit par conséquent $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2y-y^2}}$.

2°. Soit $\text{tang}\, x = u$; l'équation $\mathrm{d}.\text{tang}\, x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos x^2}$ donne $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\cos x^2}$ et $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\cos x^2$. A cause de $\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tang}\, x$, on trouve

$$\sin x = \cos x\,\text{tang}\, x, \qquad \sin x^2 = \text{tang}\, x^2\cos x^2 ;$$

et substituant $1 - \cos x^2$ à $\sin x^2$, il vient

$$1 = \cos x^2 + \text{tang}\, x^2\cos x^2 = \cos x^2(1 + \text{tang}\, x^2) :$$

on a donc

$$\cos x^2 = \frac{1}{1+\text{tang}\, x^2} = \frac{1}{1+u^2}.$$

Mettant cette valeur dans celle de dx, il en résultera $dx=\frac{du}{1+u^2}$, d'où on peut conclure que *la différentielle de l'arc est égale à celle de la tangente divisée par le quarré de la sécante;* car $\sqrt{1+u^2}$ exprime la sécante, lorsque la tangente est représentée par u.

Nous terminerons cet article par l'exemple suivant:

Soit x un arc ayant pour sinus la fonction $2u\sqrt{1-u^2}$,

on fera $2u\sqrt{1-u^2}=z$

et on aura

$$dx=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

mais $dz=\frac{2du(1-2u^2)}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\sqrt{1-z^2}=1-2u^2,$$

donc $dx=\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$.

36. On peut, par le moyen des expressions différentielles que nous venons d'obtenir, former les développemens des principales fonctions circulaires.

1°. Pour $\sin x$, on a

$$\frac{du}{dx}=\cos x,\quad \frac{d^2u}{dx^2}=-\sin x,\quad \frac{d^3u}{dx^3}=-\cos x,$$

$$\frac{d^4u}{dx^4}=\sin x, \text{ etc.}$$

faisant $x=0$, il viendra par le n°. 19, $U=0$, et

$$U'=1,\quad U''=0,\quad U'''=-1,$$

$$U''''=0, \text{ etc.}$$

d'où on conclura

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}$$

2°. On trouvera pour $\cos x$

$$\frac{du}{dx}=-\sin x,\quad \frac{d^2u}{dx^2}=-\cos x,\quad \frac{d^3u}{dx^3}=\sin x,$$

$$\frac{d^4u}{dx^4}=\cos x,\ \text{etc.}$$

faisant $x=0$, il en résultera $U=1$, et

$$U'=0,\quad U''=-1,\quad U'''=0,$$
$$U''''=1,\ \text{etc.}$$

ce qui donnera

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}$$

Ces deux formules, dont la loi est très-évidente et très-simple, offrent une des méthodes les plus exactes et les plus expéditives pour calculer le sinus et le cosinus, correspondans à un arc donné, sur-tout lorsque cet arc n'est pas très-grand. On en trouvera d'analogues pour la tangente et les autres lignes trigonométriques; mais la loi de ces dernières formules n'est pas aussi simple que celle des précédentes, et elles sont beaucoup moins commodes dans l'application que les relations qui donnent la tangente, la sécante, etc. par le moyen du sinus et du cosinus; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

37. Si on représente par y un arc de cercle dont le sinus soit x, on aura (35)

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ce qui nous conduira au développement de l'arc suivant

les puissances du sinus. En effet, on en tirera

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{3.3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3.5x^3}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{3.3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2.5.9x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3.5.7x^4}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}, \text{ etc.}$$

En faisant $x=0$, et observant que dans cette hypothèse l'arc y est nul, on trouvera

$$y=x+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{3.3x^5}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}$$

Passons à la recherche de l'arc par sa tangente; en nommant y l'arc et x sa tangente, on a (35)

$dy=\frac{dx}{1+x^2}$, d'où il suit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{2}{(1+x^2)^2}+\frac{8x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{24x}{(1+x^2)^3}-\frac{48x^3}{(1+x^2)^4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{24}{(1+x^2)^3}-\frac{208x^2}{(1+x^2)^4}+\frac{384x^4}{(1+x^2)^5}, \text{ etc.}$$

et en faisant $x = 0$, on trouve

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

La loi se manifeste ici dès les premiers termes ; il n'en est pas de même à l'égard de la série précédente ; mais comme les différentielles successives de y se compliquent de plus en plus à cause de leurs dénominateurs, le procédé que nous avons employé ci-dessus n'est pas le plus propre à conduire aux développemens cherchés. Nous en donnerons, par la suite, d'autres qui présenteront plus de facilité.

De la différentiation des équations quelconques à deux variables.

38. Jusqu'ici nous n'avons différentié que des *équations séparées*, c'est-à-dire, dans lesquelles la variable se trouvoit seule dans un membre, et la fonction dans l'autre ; telles sont les équations de la forme $Y = X$, Y étant une fonction de y, et X une fonction de x ; mais le plus grand nombre des équations que l'on rencontre dans les recherches analytiques ne se présente pas ainsi ; la variable et la fonction y sont souvent mêlées ou combinées entr'elles.

Lorsqu'on a une équation quelconque $V = 0$, entre x et y, son effet est de déterminer x par y ou y par x, en sorte que l'une de ces quantités est fonction de l'autre. Concevons pour un moment que l'on ait déterminé y par x : en substituant l'expression de y dans la quantité V, celle-ci deviendra nécessairement une fonction de x seul ; mais composée de termes qui se détruiront indépendamment d'aucune valeur de x, puisque cette variable doit rester indéterminée. Il suit de là que la quan-

tité V doit être regardée implicitement comme une fonction de x, qui est nulle pour toutes les valeurs de x, et que, par conséquent, sa différentielle doit être nulle aussi; mais pour cela, cette différentielle doit être prise en regardant y comme une fonction de x, c'est-à-dire en supposant que $dy=p\,dx$ (*). Si donc on prend sous ce point de vue, ou suivant les règles des nos. 10, 11, 12, 13, 15;

(*) On peut encore parvenir à ce résultat en substituant dans l'équation $V=0$, au lieu de x, $x+h$, au lieu de y, $y+k$, et en développant le résultat suivant les puissances des accroissemens h et k dans la forme

$$Mh+Nk+Ph^2+Qhk+Rk^2+Sh^3+\text{etc.}=0,$$

M, N, P, Q, R, S, etc. étant des quantités indépendantes de h et de k.

Cette équation qui donne la relation qu'ont entr'elles les quantités h et k, deviendra

$$Mh+N\omega h+Ph^2+Q\omega h^2+R\omega^2h^2+Sh^3+\text{etc.}=0,$$

lorsqu'on y fera $k=\omega h$; et supprimant le facteur commun h, on obtiendra

$$M+N\omega+Ph+Q\omega h+R\omega^2h+Sh^2+\text{etc.}=0:$$

le rapport ω changera à mesure que h diminuera, mais sans s'évanouir en même temps que cette quantité; et l'on aura pour déterminer ω dans l'hypothèse de $h=0$, l'équation

$$M+N\omega=0.$$

La valeur de ω qui en résultera sera la limite de toutes les valeurs que cette quantité peut prendre à raison de celle de h; il est donc évident que si on désigne cette limite par p, l'équation

$$M+Np=0$$

sera vraie en toute rigueur.

Il est visible (11) que le procédé dont on vient de faire usage pour former l'équation $M+Np=0$, seroit celui qu'il faudroit suivre pour obtenir la différentielle de l'expression V en y regardant y comme fonction de x.

la différentielle de V, et qu'on l'égale à zéro, on aura l'équation qui doit déterminer p dans cette hypothèse. Eclaircissons ceci par un exemple.

Soit l'équation

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0;$$

la quantité V étant ici $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2$, si l'on y mettait au lieu de y sa valeur

$$mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2},$$

deviendroit une fonction de x seul, et dont tous les termes se détruiroient: ainsi sa différentielle, sous cette forme, seroit visiblement égale à zéro. Mais en différentiant le premier membre, dans la supposition que y est une fonction de x, on aura

$$2y\,dy - 2m\,x\,dy - 2m\,y\,dx + 2x\,dx = 0,$$

ou $$y\,dy - mx\,dy - my\,dx + x\,dx = 0 \quad (1),$$

en supprimant le facteur commun 2; et faisant $dy = p\,dx$, on aura pour déterminer p, l'équation

$$(y - mx)p - my + x = 0.$$

On tirera de cette équation

$$p = \frac{my - x}{y - mx};$$

si l'on substituoit dans cette valeur de p celle de y, on obtiendroit

$$p = \frac{-x + m^2x \pm m\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}{\pm\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}$$

$$= m + \left\{\frac{-x + m^2x}{\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}\right\},$$

résultat semblable à celui qu'on déduiroit immédiatement de l'équation séparée

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2},$$

correspondante à la proposée.

39. Le même raisonnement appliqué à l'équation

$$(y - mx)p - my + x = 0,$$

en y considérant y et p comme des fonctions de x, conduit à l'équation

$$(dy - m\,dx)p + (y - mx)\,dp - m\,dy + dx = 0;$$

et si l'on fait

$$dy = p\,dx, \qquad dp = q\,dx$$

il vient

$$(p - m)p + (y - mx)\,q - mp + 1 = 0,$$

équation qui donne la relation que le coefficient différentiel du second ordre q, ou $\frac{d^2y}{dx^2}$ (17), doit avoir avec celui du premier ordre p, ou $\frac{dy}{dx}$, et avec les variables x et y.

En continuant de différentier de la même manière, on formeroit l'équation de laquelle dépend le coefficient différentiel du troisième ordre, et ainsi de suite.

40. Si l'on fait attention que $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, et que $d^2y = d(dy)$, on reconnoîtra que l'équation

$$(p - m)p + (y - mx)\,q - mp + 1 = 0,$$

se déduit immédiatement de l'équation

$$y\,dy - mx\,dy - my\,dx + x\,dx = 0 \qquad (1),$$

lorsqu'on la différentie en y faisant varier dy, comme une fonction de x, et divisant ensuite par dx^2. En effet, on a premièrement

$$dy^2 + y\,d^2y - 2m\,dx\,dy - mx\,d^2y + dx^2 = 0 \,(2),$$

secondement

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + 1 + (y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

équation qui, lorsqu'on y change $\frac{dy}{dx}$ en p, $\frac{d^2y}{dx^2}$ en q, s'accorde avec celle que nous avons obtenue plus haut pour déterminer q.

En général, faire varier les quantités p, q, etc. comme des fonctions de x, c'est prendre les différentielles des expressions équivalentes $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, différentielles qui sont respectivement $\frac{d^2y}{dx}, \frac{d^3y}{dx^2}$, etc. c'est enfin regarder les quantités dy, d^2y, &c. comme des fonctions de x.

L'équation (1) est *la différentielle première* de la proposée ; l'équation (2) en est *la différentielle seconde*, &c. et d'après la remarque ci-dessus, *les différentielles d'une équation* PRIMITIVE *proposée, se déduisent les unes des autres par la différentiation, en regardant* y, dy, d^2y, *etc. comme des fonctions de* x.

On passe aux équations qui donnent les coefficiens différentiels, en observant que ces coefficiens sont

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.}$$

ou en faisant

$$dy = p\,dx, \qquad d^2y = q\,dx^2, \text{ etc.}$$

Par ces dernières substitutions les différentielles disparoissent, et il ne reste dans les résultats que les fonctions p, q, etc. absolument indépendantes de la valeur de l'accroissement dx.

41. L'équation

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$$

étant du second degré, donne pour y deux valeurs, par

le moyen desquelles l'équation

$$(y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0,$$

d'où on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

donne aussi pour le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, deux valeurs correspondantes à celles de la fonction y.

Si au lieu de résoudre l'équation proposée pour en tirer la valeur de y, on avoit éliminé cette variable, entre les deux équations

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0,$$
$$(y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0$$

on auroit eu d'abord, en vertu de la seconde,

$$y = \frac{x(m\,dy - dx)}{dy - m\,dx};$$

substituant dans la première, il seroit venu, après les réductions,

$$(x^2 - a^2 - m^2x^2)dy^2 - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)\,dx\,dy + (x^2 - m^2x^2 - a^2m^2)\,dx^2 = 0.$$

Cette dernière équation étant résolue par rapport à dy, donneroit les valeurs trouvées ci-dessus. On en pourroit tirer aussi immédiatement le coefficient différentiel; il suffiroit pour cela de la diviser par dx^2; on auroit alors

$$(x^2 - a^2 - m^2x^2)\frac{dy^2}{dx^2} - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)\frac{dy}{dx} + x^2 - m^2x^2 - a^2m^2 = 0:$$

en dégageant la seconde puissance du coefficient diffé-

rentiel, exprimé par $\frac{dy^2}{dx^2}$, il viendroit

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - m^2x^2 - a^2m^2}{x^2 - a^2 - m^2x^2} = 0.$$

42. Il est facile d'appliquer ce qui précède, à des exemples plus compliqués, où dans lesquels les variables montent à un degré plus élevé. Supposons qu'on ait

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

la différentiation donnera

$$3y^2\,dy - 3ax\,dy - 3ay\,dx + 3x^2\,dx = 0,$$

ou en supprimant le facteur commun 3

$$y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0;$$

et par conséquent $$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

La fonction y, dans cet exemple, étant donnée par une équation du troisième degré, doit avoir trois valeurs; et en les substituant successivement dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$, on obtiendra un pareil nombre de valeurs pour le coefficient différentiel. On voit en général que ce coefficient aura toujours un nombre de valeurs égal à celui dont la fonction y est susceptible dans l'équation proposée : il en sera de même à l'égard de la différentielle.

Si on éliminoit y entre les deux équations

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0 \ldots\ldots\ldots (u)$$
$$y^2\,dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \ldots (du),$$

on auroit, pour résultat, une équation du troisième degré par rapport à dy, qui renfermeroit les trois valeurs dont cette différentielle est susceptible.

Ayant trouvé l'expression de dy ou celle de $\frac{dy}{dx}$, on parviendra à celles de d^2y et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, en différentiant par rapport à dy, à y et à x, suivant la règle établie n°. 40, l'équation

$$y^2\,dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \ldots\ldots (du),$$

différentielle première de la proposée. En opérant ainsi, on aura

$$y^2\,d^2y - axd^2y + 2ydy^2 - adydx - adxdy + 2xdx^2 = 0;$$

et en réduisant il viendra

$$(y^2 - ax)\,d^2y + 2ydy^2 - 2adxdy + 2xdx^2 = 0 \ldots\ldots (d^2u).$$

Voilà la différentielle seconde de l'équation proposée; si on la combine avec la différentielle première, on pourra éliminer dy, et le résultat donnera l'expression de d^2y en x, dx et y. On chassera, si on veut, la fonction y, au moyen de l'équation proposée.

En divisant l'équation (d^2u) par dx^2, elle prend la forme

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

et ne renferme plus que les coefficiens différentiels $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{dy}{dx}$. Mettant au lieu de $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, tirée de (du), il viendra

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right)^2 - 2a\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right) + 2x = 0,$$

et en réduisant au même dénominateur,

$$(y^2 - ax)^3 \frac{d^2y}{dx^2} + 2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y + 2a^3xy = 0;$$

mais la quantité

$$2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y,$$

n'est autre chose que

$$(y^3 - 3axy + x^3).2xy :$$

elle est donc nulle en vertu de l'équation proposée, et, par conséquent, on a

$$(y^2 - ax)^3 \frac{d^2y}{dx^2} + 2a^3xy = 0,$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

En différentiant (d^2u) par rapport à d^2y, dy, y et x, on formera la différentielle troisième (d^3u), et on en tirera la valeur de d^3y, lorsqu'on aura éliminé d^2y et dy à l'aide des équations (du) et (d^2u); divisant le résultat par dx^3, on aura l'expression du coefficient $\frac{d^3y}{dx^3}$. En continuant ainsi on parviendra aux différentielles ultérieures.

43. La remarque que nous avons faite (8) sur les constantes qui disparoissent par la différentiation des fonctions, s'applique également aux équations. Si on avoit, par exemple, $y^2 = ax + b$, la différentielle $2y\,dy = a\,dx$, étant indépendante de b, appartiendroit à chacune des équations particulières qui résultent de la proposée, en donnant à b toutes les valeurs possibles.

Mais

Mais on peut aussi parvenir, dans le cas actuel, à une équation indépendante de a, quoique la différentiation n'ait point fait disparoître cette constante; il suffit pour cela d'éliminer a entre les deux équations

$$y^2 = ax + b, \qquad 2y\,dy = a\,dx,$$

et on trouvera

$$y^2\,dx = 2xy\,dy + b\,dx.$$

Quoique cette dernière équation ne soit pas la différentielle immédiate de la proposée, elle en dérive cependant de manière qu'étant divisée par dx, elle exprime la relation qui doit exister entre la variable x, la fonction y et le coefficient $\frac{dy}{dx}$, quel que soit a.

Si la constante qu'on élimine n'est pas au premier degré dans l'équation proposée, le résultat qu'on obtiendra renfermera des puissances de dy et de dx supérieures à la première. Prenons pour exemple

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2;$$

en différentiant on trouvera

$$y\,dy - a\,dy + x\,dx = 0,$$

d'où $$a = \frac{y\,dy + x\,dx}{dy},$$

et substituant la proposée, il viendra, après avoir ordonné par rapport à dy et divisé par dx^2,

$$(x^2 - 2y^2)\frac{dy^2}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0:$$

telle est la relation qui doit exister entre la variable x, la fonction y et son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, indépendamment d'aucune valeur particulière de la constante a.

En résolvant l'équation

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2,$$

par rapport à a, on en auroit tiré

$$a = -y \pm \sqrt{2y^2 + x^2};$$

et a se trouvant dégagé des variables x et y, la différentiation seule l'auroit fait disparoître : on auroit trouvé

$$-dy \pm \frac{2y\,dy + x\,dx}{\sqrt{2y^2 + x^2}} = 0.$$

En faisant évanouir le radical on s'assurera que cette équation est la même que celle que nous avons obtenue par l'élimination.

44. On peut faire disparoître autant de constantes qu'on voudra, en différentiant un nombre de fois égal à celui de ces constantes. Soit $y^2 = m(a^2 - x^2)$, on aura d'abord $y\,dy = -mx\,dx$; différentiant de nouveau, on trouvera $y\,d^2y + dy^2 = -m\,dx^2$; substituant pour m sa valeur $\frac{-y\,dy}{x\,dx}$, tirée de l'équation précédente, et divisant par dx^2, il viendra

$$y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy^2}{dx^2} - xy\frac{d^2y}{dx^2} = 0 :$$

résultat indépendant des constantes m et a.

45. La différentiation, combinée avec l'élimination, fournit le moyen de faire disparoître les fonctions irrationnelles. Soit par exemple

$$P^n = Q,$$

P et Q étant des fonctions quelconques de x et de y; en

prenant la différentielle de cette équation, il viendra

$$nP^{n-1}\,dP = dQ, \quad \text{ou } nP^n dP = P\,dQ$$

en multipliant les deux membres par P; et si l'on met pour P^n sa valeur, on obtiendra

$$nQ\,dP = P\,dQ$$

équation dans laquelle la quantité P est délivrée de l'exposant n.

On parvient au même résultat en prenant le logarithme de chaque membre de l'équation proposée; on a successivement

$$n\,lP = lQ, \qquad n\frac{dP}{P} = \frac{dQ}{Q} \quad (27)$$

et par conséquent $nQdP = P\,dQ$.

Cette remarque va nous servir à développer, suivant les puissances de x, la fonction

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.})^n,$$

quel que soit l'exposant n. Pour cela soit

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.})^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

passant aux logarithmes, nous aurons

$$n\,l(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}) = l(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.});$$

différentiant ensuite, nous obtiendrons

$$\frac{n(b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \text{etc.})\,dx}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}} = \frac{(B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.})\,dx}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}};$$

supprimant le facteur commun dx, faisant dispa-

roître les dénominateurs, et développant chaque membre par rapport aux puissances de x,

$$\left.\begin{array}{r} nAb + 2nAcx + 3nAdx^2 + 4nAex^3 + \text{etc.} \\ + \quad nBbx + 2nBcx^2 + 3nBdx^3 + \text{etc.} \\ + \quad nCbx^2 + 2nCcx^3 + \text{etc.} \\ + \quad nDbx^3 + \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$\left.\begin{array}{r} aB + 2aCx + 3aDx^2 + 4aEx^3 + \text{etc.} \\ + \quad bBx + 2bCx^2 + 3bDx^3 + \text{etc.} \\ + \quad cBx^2 + 2cCx^3 + \text{etc.} \\ + \quad dBx^3 + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

mais comme x doit rester indéterminé, il faut que les deux membres de cette équation deviennent identiques par les coefficiens mêmes de x, c'est-à-dire, que les coefficiens de la même puissance soient respectivement égaux dans chaque membre. Cette considération dont nous nous sommes déjà servis dans le n°. 193 des Elémens d'Algèbre, fournit les équations suivantes

$$\begin{array}{l} nAb = aB \\ 2nAc + nBb = 2aC + bB \\ 3nAd + 2nBc + nCb = 3aD + 2bC + cB; \\ \text{etc.} \end{array}$$

dont on tirera les valeurs des coefficiens B, C, D, etc. Le coefficient A semble demeurer indéterminé, cependant on en trouve la valeur en faisant $x = 0$ dans l'équation

$$(a + bx + \text{etc.})^n = A + Bx + \text{etc.}$$

qui par cette hypothèse se réduit à

$$a^n = A.$$

Substituant cette expression dans les équations précé-

dentes, on en conclut

$$B=\frac{n}{1}a^{n-1}b$$

$$C=na^{n-1}c+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2$$

$$D=na^{n-1}d+\frac{n(n-1)}{1.1}a^{n-2}bc+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3$$

etc.

d'où $(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})^n=$

$$a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}bx+\left\{na^{n-1}c+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\right\}x^2$$

$$+\left\{na^{n-1}d+\frac{n(n-1)}{1.1}a^{n-2}bc+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3\right\}x^3$$

$+$ etc.

46. On peut faire disparoître aussi les transcendantes d'une équation en la combinant avec ses différentielles. L'une des plus simples de ces fonctions est

$$l(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.});$$

si on représente son développement par

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

et qu'on prenne la différentielle de l'équation

$$l(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

on trouvera

$$\frac{b+2cx+3dx^2+\text{etc.}}{a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}}=B+2Cx+3Dx^2+\text{etc.}$$

et on déterminera les coefficiens A, B, C, D, etc. comme à l'ordinaire.

Prenons encore pour exemple

$$\sin(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})$$
$$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}$$

et faisons pour abréger

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}=u,$$
$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}=y;$$

il en résultera $y=\sin u$: en différentiant il viendra $dy=du\cos u$. On pourroit éliminer $\cos u$ au moyen de l'équation $\cos u=\sqrt{1-\sin u^2}$, qui donne $\cos u=\sqrt{1-y^2}$, et on auroit alors $dy=du\sqrt{1-y^2}$; mais il faudroit encore faire disparoître le radical dans cette équation. Pour éviter cet inconvénient on différentiera une seconde fois l'équation $dy=du\cos u$, en se rappelant que u est une fonction de x aussi bien que y, et il viendra $d^2y=d^2u\cos u-du^2\sin u$; mettant pour $\sin u$ et $\cos u$, leurs valeurs y et $\frac{dy}{du}$, on aura

$$d^2y=\frac{dy}{du}d^2u-y\,du^2, \text{ ou } du\,d^2y-dy\,d^2u+y\,du^2=0.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer à y, dy, d^2y, du, d^2u, du^2, leur valeur; or

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

donne

$$dy=(B+2Cx+3Dx^2+\text{etc.})dx$$
$$d^2y=\quad(2C+2.3Dx+\text{etc.})dx^2;$$

et pour ne pas m'engager dans de trop longs calculs, je réduirai la fonction proposée à $\sin(a+bx+cx^2)$, en faisant d, e, etc.$=0$. Dans ce cas particulier

$$du=(b+2cx)dx,$$
$$d^2u=2c\,dx^2,$$
$$du^3=(b^3+6b^2cx+12bc^2x^2+8c^3x^3)dx^3;$$

au moyen de ces valeurs l'équation

$$du\,d^2y-dy\,d^2u+y\,du^3=0$$

devient divisible par dx, et en l'ordonnant par rapport à x, elle prend la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{rrrr} 2bC+ & 6bDx+ & 12bEx^2+ & \text{etc.} \\ + & 4cCx+ & 12cDx^2+ & \text{etc.} \\ +b^3A+ & 6b^2cAx+ & 12bc^2Ax^2+ & \text{etc.} \\ + & b^3Bx+ & 6b^2cBx^2+ & \text{etc.} \\ & + & b^3Cx^2+ & \text{etc.} \\ -2cB- & 4cCx- & 6cDx^2- & \text{etc.} \end{array}\right\}=0.$$

En égalant à zéro les coefficiens de chaque puissance de x, on obtiendra les équations qui déterminent C, D, E, etc. à l'égard de A et B, il faut recourir aux équations

$$y=\sin u \text{ et } \frac{dy}{du}=\cos u.$$

Lorsque $x=0$, il vient

$$u=a, \quad y=A, \quad du=b\,dx, \quad dy=B\,dx,$$

et il résulte de ces valeurs

$$A=\sin a, \quad B=b\cos a.$$

Recherche des maxima *et des* minima *des fonctions d'une seule variable.*

47. La recherche des plus grandes et des moindres valeurs dont est susceptible une fonction donnée, forme une des plus importantes applications analytiques du Calcul différentiel ; en voici les principes.

Lorsque la variable de laquelle dépend une fonction proposée passe successivement par tous les degrés de grandeur, il peut arriver que la série des valeurs que reçoit cette fonction, soit d'abord croissante, et devienne ensuite décroissante ; il y aura alors une de ces valeurs qui surpassera toutes les autres. Si au contraire la série des valeurs de la fonction proposée est d'abord dé-

plus considérable, on conçoit facilement qu'il est toujours possible de prendre h assez petite pour que le terme $\frac{dy}{dx}h$ surpasse la somme de tous ceux qui le suivent; alors y sera plus grand que la première valeur $_{,}y$, et moindre que la seconde y'; la fonction proposée ne sera par conséquent ni un *maximum* ni un *minimum* tant que $\frac{dy}{dx}$ ne sera pas nul (*). Mais si on avoit $\frac{dy}{dx}=0$, comme il viendroit alors

$$_{,}y=y+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$y'=y+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

on auroit en même temps $y<{}_{,}y$ et $y<y'$, lorsque la valeur du coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ seroit positive, ou bien $y>{}_{,}y$ et $y>y'$ lorsque cette valeur seroit négative: le premier cas donneroit y *minimum*, et le second y *maximum*. Nous conclurons de là, que *pour trouver*,

---

(*) Si l'on élevoit quelque doute sur cette assertion, il suffiroit, pour en reconnoître l'exactitude, d'observer qu'une série de la forme

$$Ah+Bh^2+Ch^3+Dh^4+\text{etc.}$$

peut s'écrire ainsi

$$h[A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{etc.}],$$

et que la partie

$$Bh+Ch^2+Dh^3+\text{etc.}$$

qui s'anéantit lorsque $h=0$, peut par conséquent devenir moindre que la quantité A dont la valeur est indépendante de celle de h et constante.

quand une fonction y *doit atteindre son* maximum *ou son* minimum, car l'un et l'autre sont donnés par la même équation, *il faut chercher l'expression du premier coefficient différentiel* $\frac{dy}{dx}$ *et l'égaler à zéro.*

Dans l'exemple $y = b - (x-a)^2$, rapporté ci-dessus, on a $\frac{dy}{dx} = -2(x-a)$, et en l'égalant à zéro, on trouve $x = a$. Pour savoir maintenant si cette valeur répond à un *maximum* ou à un *minimum*, on cherchera ce que devient $\frac{d^2y}{dx^2}$; et comme il se réduit à -2, quantité négative, il s'ensuit que la supposition de $x = a$ donne le *maximum*.

En traitant de même la fonction

$$y = b + (x-a)^2,$$

on auroit encore trouvé $x = a$, mais $\frac{d^2y}{dx^2}$ seroit devenu positif; c'est donc le *minimum* qui a lieu dans ce cas.

49. De ce qu'on doit avoir $\frac{dy}{dx} = 0$, dans le cas du *maximum* ou du *minimun*, il n'en faut pas conclure que l'un ou l'autre ont nécessairement lieu toutes les fois que cette condition est remplie. En effet, si la valeur de x, qui rend $\frac{dy}{dx}$ nul, faisoit évanouir en même temps $\frac{d^2y}{dx^2}$, sans que $\frac{d^3y}{dx^3}$ disparût, comme on trouveroit dans cette circonstance

$$y = y - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$y' = y + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

et que le terme $\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}$ pourroit, au moyen d'une valeur convenable de h, surpasser la somme de tous ceux qui le suivent, il n'y auroit plus entre les trois quantités $,y, y, y'$, la subordination qui convient au *maximum* ou au *minimum* : la moyenne seroit plus grande que l'une des extrêmes et moindre que l'autre.

Mais si on avoit aussi $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, il viendroit

$$,y = y + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$y' = y + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^3}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

les conditions du *maximum* ou du *minimum* seroient encore remplies, et on reconnoîtroit au signe de $\frac{d^4y}{dx^4}$, lequel des deux devroit avoir lieu.

Sans qu'il soit besoin de pousser plus loin ces considérations, on verra qu'en général il ne peut y avoir de *maximum* ou de *minimum*, que quand le premier des coefficiens différentiels qui ne s'évanouissent pas, est d'un ordre pair, et que ce coefficient doit être négatif, lors du *maximum*, et positif lors du *minimum*.

Comme nous devons revenir sur ce sujet à l'occasion de la théorie des courbes, nous ne donnerons pour le moment que quelques applications.

50. Supposons d'abord qu'il s'agisse de *partager une quantité* a *en deux parties, de manière que le produit de la puissance* m *de la première, par la puissance* n *de la seconde, soit le plus grand de tous les produits semblables qu'on pourroit former.*

Soit x une des parties de a, l'autre sera $a-x$, et le produit dont on cherche le *maximum* étant représenté par y, on aura $y=x^m(a-x)^n$, d'où on tirera

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}$$
$$=[ma-mx-nx]x^{m-1}(a-x)^{n-1};$$

et en égalant à zéro chacun des facteurs de ce résultat, on trouvera

$$x=\frac{ma}{m+n},\ x=0,\ x=a.$$

La première de ces valeurs répond à un *maximum*, car lorsqu'on la substitue dans l'expression générale de $\frac{d^2y}{dx^2}$, elle donne la quantité négative

$$-\frac{m^{m-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}:$$

les deux autres répondront à des *minima*, lorsque m et n seront pairs, comme on peut s'en assurer par l'examen des coefficiens différentiels, ou plus simplement encore, en faisant $x=\pm h$ et $x=a\pm h$. On trouvera toujours un résultat positif dans l'un et l'autre cas, quel que soit le signe qu'on donne à h; ce qui prouve que la fonction proposée après avoir décrû jusqu'à devenir nulle, ne passe point au négatif, mais qu'elle recommence à croître.

51. Considérons encore la fonction que y désigne dans l'équation

$$y^2-2mxy+x^2-a^2=0,$$

dont la différentielle est

$$(y-mx)dy-(my-x)dx=0\ (38);$$

nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

d'où nous tirerons

$$my - x = 0.$$

Pour obtenir la valeur de x, il faudra combiner cette dernière équation avec la proposée ; on aura par ce moyen

$$y = \frac{x}{m}, \qquad \frac{x^2}{m^2} - x^2 - a^2 = 0,$$

d'où il résulte

$$x = \frac{ma}{\sqrt{1 - m^2}}, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

Il reste à examiner ce que devient le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$. La différentielle seconde de l'équation proposée donne la suivante

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

que la supposition de $\frac{dy}{dx} = 0$ réduit à

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0,$$

et d'où on tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-m}{x(1 - m^2)},$$

en mettant pour y sa valeur. Il faut encore substituer celle de x ; en le faisant on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{d\sqrt{1 - m^2}} :$$

ce résultat étant négatif montre que la valeur de y, trouvée ci-dessus, est un *maxi*

Des valeurs que prennent dans certains cas les coefficiens différentiels, et des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$.

52. Si on cherchoit le *maximum* ou le *minimum* de la fonction $a\,y = \sqrt{a^2x^2 - x^4}$, par exemple, on en déduiroit $a\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}$, et en faisant $x = 0$, il viendroit $a\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Cependant avec un peu d'attention on verra que le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}$ ne s'évanouissent en même temps que parce qu'ils sont affectés du facteur commun x. Si on les en délivre, on trouvera $a\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, et par conséquent $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, lorsque $x = 0$.

En général si on fait $x = a$ dans une expression de la forme $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, elle deviendra $\frac{0}{0}$; néanmoins sa vraie valeur doit être ou nulle, ou finie, ou infinie, selon qu'on aura $m > n$, $m = n$, $m < n$; car en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on trouvera $\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q}$ dans le premier cas, $\frac{P}{Q}$ dans le second, et $\frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}$ dans le troisième, bien entendu que les quantités P et Q ne deviendront ni nulles ni infinies par la supposition de $x = a$.

Lors donc qu'une expression quelconque se présente

sous la forme $\frac{0}{0}$, il faut, pour connoître sa vraie signification, la dégager des facteurs qui sont communs à son numérateur et à son dénominateur (*Alg.* 200). La différentiation va nous en fournir le moyen.

La différentielle de l'expression $P(x-a)$, dans laquelle P désigne une fonction quelconque de x, mais indépendante du facteur $x-a$, étant

$$(x-a)\,\mathrm{d}P + P\,\mathrm{d}x$$

ne s'évanouit plus lorsque $x = a$.

Si l'on différentioit deux fois la fonction $P(x-a)^2$, on trouveroit

$$(x-a)^2\,\mathrm{d}P + 2(x-a)P\,\mathrm{d}x$$
$$(x-a)^2\mathrm{d}^2P + 4(x-a)\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}x + 1.2P\,\mathrm{d}x^2;$$

et comme P ne contient pas $x-a$, la différentielle seconde se réduiroit à son dernier terme. En poursuivant ainsi, il est facile de se convaincre que toutes les différentielles d'une expression de la forme $P(x-a)^m$ jusqu'à celle de l'ordre $m-1$ inclusivement, s'évanouissent dans la supposition de $x = a$, lorsque m est un nombre entier, et qu'alors la différentielle de l'ordre m se réduit à $1.2\ldots m\,P\,\mathrm{d}x^m$: le facteur $(x-a)^m$ disparoît donc, dans cette hypothèse, après m différentiations.

Il n'est pas nécessaire qu'on connoisse l'exposant m, ni même que le facteur $(x-a)^m$ soit en évidence, pour savoir quand l'expression $P(x-a)^m$ en est délivrée; il suffit de s'assurer, après chaque différentiation, si le résultat obtenu s'évanouit ou non, lorsqu'on met a à la place de x; dans le dernier cas l'opération est finie, et ce qu'on a trouvé représente la quantité $1.2\ldots m\,P\,\mathrm{d}x^m$. Soit, pour exemple, la fonction $x^3 - ax^2 - a^2x + a^3$, qui s'évanouit par la supposition de $x = a$; sa différentielle première s'évanouit aussi dans cette hypothèse, mais

mais non pas sa différentielle seconde, qui est $(6x-2a)\,dx^2$. La voilà donc délivrée du facteur $(x-a)$; et puisqu'il a fallu pour cela deux différentiations, on en doit conclure qu'elle est de la forme $P(x-a)^2$, ce qui est d'ailleurs aisé à vérifier, car on trouvera

$$x^3-ax^2-a^2x+a^3=(x+a)(x-a)^2.$$

En appliquant ce qui précède à la fraction $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, on verra qu'en différentiant, plusieurs fois de suite, son numérateur et son dénominateur, ils seront délivrés à-la-fois du facteur $(x-a)$, si $m=n$. Si c'est le numérateur qui donne le premier un résultat qui ne s'évanouisse pas, ce sera une preuve que le facteur $(x-a)$ s'y trouve élevé à une puissance moindre que dans le dénominateur, et par conséquent la fraction proposée sera infinie; si c'est au contraire le dénominateur, la fraction proposée sera nulle. On peut donc énoncer la règle suivante : *Pour obtenir la vraie valeur d'une fonction qui devient* $\frac{0}{0}$ *lorsqu'on donne à* x *une valeur particulière, il faut différentier son numérateur et son dénominateur, jusqu'à ce qu'on trouve pour l'un ou pour l'autre un résultat qui ne s'évanouisse pas; la fonction proposée sera infinie dans le premier cas, nulle dans le second, et elle aura une valeur finie, si on rencontre en même temps deux résultats qui ne s'anéantissent point.*

Quelques exemples éclairciront suffisamment ceci.

53. 1°. La formule $\frac{x^n-1}{x-1}$ qui exprime la somme des n premiers termes de la progression par quotiens $\div 1 : x : x^2 : x^3 :$ etc. devient $\frac{0}{0}$ quand $x=1$; cependant cette somme dans la progression $\div 1:1:1:1$, etc. à

laquelle on est conduit alors, a une valeur déterminée et égale à n, que la règle précédente va nous donner aussi. En effet, après avoir différentié le numérateur et le dénominateur de l'expression $\frac{x^n-1}{x-1}$ on trouve $\frac{nx^{n-1}\,dx}{dx}$, et en écrivant 1 au lieu de x, il vient n.

2°. La vraie valeur de $\frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$, dans le cas où $x=c$ ne peut s'obtenir qu'après deux différentiations, car la première donne $\frac{ax-ac}{bx-bc}$, résultat qui devient encore $\frac{0}{0}$; mais en le différentiant on trouve $\frac{a}{b}$.

3°. Cherchons encore la valeur de la fraction

$$\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{x^2-a^2},$$

lorsque $x=a$; nous trouverons, après avoir différentié une fois le numérateur et le dénominateur, que le premier seul devient encore nul quand on met a au lieu de x; ce qui nous apprend que la vraie valeur de la fonction proposée est nulle. Le contraire auroit eu lieu pour la fonction

$$\frac{ax-x^2}{a^4-2a^3x+2ax^3-x^4}.$$

4°. Quoiqu'on ne voie pas tout de suite comment il est possible de donner la forme $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ à la fonction transcendante $\frac{a^x-b^x}{x}$ qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x=0$, on peut néanmoins y appliquer la règle, et après avoir différentié son numérateur et son dénominateur, on

trouve $a^x la - b^x lb$: en mettant o pour x, on a $la - lb$, pour la vraie valeur cherchée.

Ce résultat s'obtient tout de suite en substituant aux fonctions a^x et b^x leurs développemens (24, 25), car il vient

$$\frac{a^x - b^x}{x} = (la - lb) + \{(la)^2 - (lb)^2\}\frac{x}{1.2} + \text{etc.}$$

et la supposition de $x=0$ réduit le second membre de cette équation à son premier terme : en suivant l'opération, on remarquera qu'il y a un facteur x qui disparoît par la division.

5°. La fonction $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque l'arc $x=1^q$; mais en lui appliquant la règle, on trouve que sa vraie valeur est alors 1.

6°. Le lecteur pourra s'exercer sur les fonctions

$$\frac{a - x - a la + a lx}{a - \sqrt{2ax - x^2}} \text{ et } \frac{x^x - x}{1 - x + lx};$$

la première devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$, et la seconde lorsque $x=1$: leurs vraies valeurs sont respectivement -1 et -2.

54. La règle du n°. 52 ne seroit pas applicable au cas où les facteurs qui s'évanouissent seroient élevés à des puissances fractionnaires ; car les différentiations successives ne retranchant que des unités, de l'exposant m du facteur $x-a$, ne peuvent épuiser cet exposant lorsqu'il est fractionnaire : seulement il devient négatif quand le nombre des différentiations surpasse l'entier qui s'y trouvoit contenu (13). Si on avoit par exemple $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$, quoique la vraie valeur de cette fraction, lorsque $x=a$,

soit $2x^{\frac{1}{2}}$, on n'y parviendroit jamais par la différentiation : on trouveroit successivement

$$\frac{3x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+3x^2(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}, \text{ etc.}$$

Le premier de ces résultats devient encore $\frac{0}{0}$, quand on fait $x=a$; et la même supposition rend infinis les numérateurs et les dénominateurs de chacun des suivans. Si on fait disparoître les exposans négatifs, en passant au dénominateur ceux qui se trouvent dans le numérateur, *et vice versâ*, les expressions nouvelles qui naîtront de ce changement se réduiront toutes à $\frac{0}{0}$.

55. Cette difficulté tient à ce que la différentielle d'une fonction de x ne peut être de la forme $p\,dx$, dans le cas où une valeur particulière de x, fait disparoître une irrationalité dans cette fonction.

Si l'on avoit $y=b+\sqrt{x-a}$ par exemple, et qu'on voulut, lorsque $x=a$, trouver la valeur consécutive à y, il faudroit mettre $a+dx$, au lieu de x ; il viendroit

$$y+dy=b+\sqrt{dx}$$

et la différentielle seroit $dy=\sqrt{dx}=dx^{\frac{1}{2}}$; l'irrationalité affecte dans ce cas l'accroissement qui, en général, s'en trouve dégagé.

Le coefficient différentiel devenant $\frac{dy}{dx}=\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}=\frac{1}{dx^{\frac{1}{2}}}$

a dans cette circonstance une valeur infinie ; ainsi ce coefficient n'est plus susceptible de limite. Dans la suite,

la considération des courbes éclaircira encore mieux cette espèce de paradoxe.

56. Voici un procédé général exempt de toute difficulté, qui comprend la règle du n°. 52, et que je n'ai présenté le dernier que parce qu'il m'a semblé que les considérations du n°. cité pouvoient jeter un grand jour sur l'objet qui nous occupe.

Soit $\frac{X}{X'}$ une fraction dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent tous deux quand $x = a$; en substituant $a + h$, au lieu de x, les fonctions X et X' se développeront suivant des séries de la forme

$$Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + \text{etc.} \qquad A'h^{\alpha'} + Bh^{\beta'} + \text{etc.}$$

et *ascendantes*, c'est-à-dire, dans lesquelles les exposans α, β, etc. iront en croissant et seront positifs, puisque ces séries doivent devenir nulles dans l'hypothèse de $h=0$, qui répond à celle de $x=a$: on aura donc

$$\frac{Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + \text{etc.}}{A'h^{\alpha'} + B'h^{\beta'} + \text{etc.}}$$

au lieu de la fraction proposée. Si dans ce résultat on suppose en effet $h = 0$, on doit retomber sur la valeur que reçoit la fonction $\frac{X}{X'}$, lorsqu'on change x en a ; et quoiqu'il semble d'abord se réduire à $\frac{0}{0}$, on va voir cependant qu'il a toujours une valeur déterminée.

En distinguant les trois cas $\alpha > \alpha'$, $\alpha = \alpha'$ et $\alpha < \alpha'$, nous pourrons, dans les deux premiers, écrire ainsi qu'il suit l'expression précédente :

$$\frac{Ah^{\alpha-\alpha'} + Bh^{\beta-\alpha'} + \text{etc.}}{A' + Bh^{\beta'-\alpha'} + \text{etc.}}$$

Sous cette forme il est aisé d'appercevoir que tant que α surpasse α', la supposition de $h = 0$ rend la frac-

tion nulle, et qu'elle se réduit à $\frac{A}{A'}$ lorsqu'on a $\alpha = \alpha'$. Dans le troisième cas, au contraire, où α est $< \alpha'$, on a

$$\frac{A + Bh^{\beta-\alpha} + \text{etc.}}{A'h^{\alpha'-\alpha} + B'h^{\beta'-\alpha} + \text{etc.}}$$

et ce résultat devient infini par la supposition de $h = 0$. Dans tous ces cas, la vraie valeur qu'on cherche ne dépend que du premier terme de chaque série.

La règle suivante s'étend à toutes les fonctions qui peuvent se présenter sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: *cherchez le premier terme de chacune des séries ascendantes qui expriment le développement du numérateur et du dénominateur, lorsque* $x = a + h$; *réduisez à sa plus simple expression la nouvelle fraction formée de ces premiers termes, et faites ensuite* $h = 0$: *les résultats que vous obtiendrez seront les différentes valeurs que prend la fraction proposée lorsqu'on fait* $x = a$.

Cette règle paroîtra quelquefois plus commode que le procédé de la différentiation, dans le cas où il peut s'employer. Ce n'est, par exemple, qu'après avoir différentié quatre fois de suite le numérateur et le dénominateur de la fraction

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}},$$

qu'on parvient à en trouver la vraie valeur dans le cas où $x = a$.

En écrivant $a + h$ au lieu de x, comme le prescrit la règle, il vient

$$\frac{2a^3 + 2a^2h - ah^2 + h^3 - 2a^2\sqrt{a^2 + 2ah}}{-2a^2 + h^2 + 2a\sqrt{a^2 - h^2}};$$

réduisant en série les deux quantités radicales, on aura

$$\sqrt{a^2+2ah} = a+h-\frac{h^2}{2a}+\frac{h^3}{2a^2}-\frac{5h^4}{8a^3}+\text{etc.}$$

$$\sqrt{a^2-h^2} = a-\frac{h^2}{2a}-\frac{h^4}{8a^3}-\text{etc.}$$

La substitution de ces deux suites dans la fraction précédente donnera $-5a$ pour la vraie valeur cherchée.

Dans les cas où la valeur particulière de x fait disparoître quelques radicaux, et qui, par-là, échappent à la règle du n°. 52, il faut nécessairement avoir recours à celle dont nous venons de faire usage. La fraction $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$ dont on ne peut obtenir la valeur par la différentiation lorsque $x=a$ (54), donne

$$\frac{(2ah+h^2)^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}} = (2a+h)^{\frac{1}{2}}$$

en changeant x en $a+h$; et faisant $h=0$, on obtient la vraie valeur $(2a)^{\frac{1}{2}}$.

57. Une fonction peut encore se présenter sous plusieurs formes indéterminées, différentes en apparence de $\frac{0}{0}$, mais qui, dans le fond, reviennent au même, et qu'il est bon de connoître.

1°. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{X}{X'}$ peuvent devenir infinis en même temps; mais cette fraction étant écrite ainsi : $\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}}$, se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque X et X' sont infinis.

2°. Il peut arriver qu'on rencontre un produit composé de deux facteurs, l'un infini et l'autre nul : soit PQ ce produit ; si la supposition de $x = a$ donne $P = 0$, $Q = \frac{b}{0}$, on fera $Q = \frac{1}{R}$, et R sera une quantité nulle dans la même hypothèse ; il viendra donc

$$PQ = \frac{P}{R} = \frac{0}{0} (*).$$

(*) Le procédé du n°. 56 présente quelques difficultés lorsqu'il s'agit de l'appliquer à des coefficiens différentiels donnés par une équation dans laquelle les variables x et y se trouvent mêlées. Il faut avoir recours à des moyens particuliers pour tirer de l'équation primitive proposée, une valeur de y développée et ordonnée suivant les puissances de h. (*Voyez* le Traité du Calc. diff. et du Calc. int.) Cependant quand cette équation est délivrée de radicaux, on peut parvenir à la vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$ par les considérations indiquées dans la note de la page 41.

En effet, l'équation $M + Np = 0$ donnant $p = -\frac{M}{N}$ conduit à $p = \frac{0}{0}$, lorsque les quantités M et N s'évanouissent en même temps; mais dans ce cas le développement complet d'où cette équation est tirée,

$$Mh + N\omega h + Ph^2 + Q\omega h^2 + R\omega^2 h^2 + Sh^3 + \text{etc.} = 0$$

se réduit à

$$Ph^2 + Q\omega h^2 + R\omega^2 h^2 + Sh^3 + \text{etc.} = 0,$$

devient divisible par h^2 ; puis passant aux limites en faisant $h = 0$, et changeant ω en p, on obtient

$$P + Qp + Rp^2 = 0 :$$

on trouve donc dans ce cas deux valeurs de p.

Si les valeurs de x et de y, qui font disparoître les quantités M et N, anéantissoient aussi les quantités P, Q et R, il faudroit recourir aux termes où l'accroissement h monte au troisième degré, pour obtenir p qui auroit alors trois valeurs. On verra dans la suite comment les quantités P, Q, R, etc. qu'on peut calculer *à priori*, en effectuant la substitution indiquée dans la note de la page 41, se forment aussi par des différentiations.

58. Si on demandoit la valeur que reçoit la fonction $\frac{lx}{x^n}$ quand x est infini, ou, ce qui est la même chose, la limite de cette fonction, on ne pourroit y parvenir par aucun des procédés dont nous avons fait usage jusqu'à présent, à cause de l'impossibilité de réduire lx en série, et il faudroit recourir aux considérations particulières à la nature de la fonction proposée lx. On a $e^{lx}=x$, et les n°s. 24 et 25 donnent

$$x=1+\frac{lx}{1}+\frac{(lx)^2}{1.2}+\frac{(lx)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$\text{et } x^n=1+\frac{nlx}{1}+\frac{n^2(lx)^2}{1.2}+\frac{n^3(lx)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

d'où l'on conclura

$$\frac{lx}{x^n}=\frac{lx}{1+\frac{nlx}{1}+\frac{n^2(lx)^2}{1.2}+\frac{n^3(lx)^3}{1.2.3}+\text{etc.}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{lx}+n+\frac{n^2lx}{1.2}+\frac{n^3(lx)^2}{1.2.3}+\text{etc.}}$$

quantité qui tend à devenir nulle à mesure que x augmente, au moins tant que n n'est pas d'une petitesse comparable à celle de $\frac{1}{lx}$ (57).

59. Une équation $V=0$, qui a des racines égales, est nécessairement de la forme

$$V=P(x-a)^n=0,$$

le facteur P contenant les racines inégales; et il suit de ce qui a été dit n°. 52, que tous les coefficiens différentiels $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$, jusqu'à $\frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}}$ inclusivement, s'éva-

nouiront par la supposition de $x=a$, parce qu'ils renfermeront le facteur $x-a$ qui sera élevé à la puissance $n-1$ dans le premier, à la puissance $n-2$ dans le second, et ainsi de suite. Les équations

$$V=0,\quad \frac{dV}{dx}=0,\quad \frac{d^2V}{dx^2}=0,\ldots\quad \frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}}=0,$$

auront donc lieu en même temps; et si on cherche le diviseur commun entre la première et la seconde, qui sont respectivement

$$X(x-a)^n=0,\ \frac{dX}{dx}(x-a)^n+nX(x-a)^{n-1}=0,$$

il est visible qu'on doit trouver $(x-a)^{n-1}$.

On reconnoîtra sans peine que les équations $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{d^2V}{dx^2}=0$ etc. sont précisément celles que l'on a désignées par (A), (B), etc. dans le n°. 210, des Elémens d'Algèbre.

Ces considérations s'appliqueront aisément au cas où la proposée renfermera plusieurs espèces de racines égales, c'est-à-dire, sera de la forme

$$X(x-a)^n(x-b)^p=0;$$

car en différentiant le premier membre suivant la règle du n°. 11, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^n(x-b)^p\frac{dX}{dx}+nX(x-a)^{n-1}(x-b)^p\\+pX(x-a)^n(x-b)^{p-1}\end{aligned}\right\}$$

quantité qui s'évanouit aussi lorsqu'on fait $x=a$ ou $x=b$, et dont le diviseur commun avec le premier membre de l'équation proposée est évidemment

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}.$$

On peut opérer de même quel que soit le nombre des facteurs $(x-a)^n$, $(x-b)^p$, $(x-c)^q$, etc. et on trou-

vera toujours que le *diviseur commun entre les équations* $V=0$, $\frac{dV}{dx}=0$, *doit contenir des racines égales élevées chacune à une puissance moindre d'une unité, que dans la proposée* $V=0$.

Application du Calcul différentiel à la théorie des courbes.

60. C'est par des recherches relatives aux lignes courbes, que les Géomètres sont parvenus au Calcul différentiel, qu'on a présenté depuis sous des points de vue très-variés; mais quelle que soit l'origine que l'on donne à ce Calcul, il reposera toujours immédiatement sur un *fait analytique* préexistant à toute hypothèse, comme la chute des corps graves vers la surface de la terre, préexiste à toutes les explications qu'on en a données: et ce fait est précisément la propriété dont jouissent toutes les fonctions d'admettre une limite dans le rapport que leurs accroissemens ont avec ceux de la variable dont elles dépendent. Cette limite, différente pour chaque fonction, mais constamment la même pour une même fonction, et toujours indépendante des valeurs absolues des accroissemens, caractérise d'une manière qui lui est propre la *marche* de cette fonction dans les divers états par lesquels elle peut passer. En effet, plus les accroissemens de la variable indépendante sont petits, plus les valeurs successives de la fonction sont resserrées, plus enfin cette fonction approche d'être soumise à la loi de continuité dans ses changemens, et plus le rapport de ces changemens à ceux de la variable indépendante approche d'être égal à la limite assignée par le

calcul. Par la loi de continuité on doit entendre celle qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après laquelle les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle. La manière d'envisager les grandeurs dans le calcul, ne paroît pas admettre cette loi, puisqu'on suppose toujours un intervalle entre deux valeurs consécutives de la même quantité; mais plus cet intervalle est petit, plus on se rapproche de la loi de continuité, à laquelle la limite convient parfaitement; c'est aussi en vertu de cette loi de continuité que les accroissemens quoiqu'évanouissans, conservent encore le rapport dont ils se sont approchés par degrés avant de s'évanouir.

Il me paroît maintenant très-évident que la métaphysique précédente renferme l'explication philosophique des propriétés du Calcul différentiel et du Calcul intégral, soit par rapport aux recherches sur les courbes, soit par rapport à celles qui concernent le mouvement. La difficulté des unes et des autres ne vient que de ce qu'il y a continuité dans les changemens des lignes ou dans ceux des vîtesses; et la considération des limites (ou toute autre équivalente), donne le moyen d'établir cette continuité dans le Calcul.

61. Les considérations géométriques prouvent d'une manière bien évidente que le rapport des accroissemens d'une fonction et de sa variable est en général susceptible de limites.

Toute fonction d'une seule variable peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe dont cette variable est l'abscisse (*Trig.* 63); et le rapport de l'ordonnée de la courbe avec sa soutangente, correspond au coefficient différentiel de la fonction. En effet, si dans

une courbe quelconque CD, *fig.* 1, on mène par deux points M et M' une sécante MM' prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en S, l'axe des abscisses AB, qu'on tire les deux ordonnées PM, $P'M'$, et la droite MQ parallèle à AB, les triangles semblables $M'QM$ et MPS montreront que les rapports $\frac{M'Q}{MQ}$ et $\frac{PM}{PS}$ sont toujours égaux. Mais si l'on conçoit que le point M' se rapproche sans cesse du point M, le point S se rapprochera aussi du point T; la ligne PS tendra donc à devenir égale à la soutangente PT. Le rapport $\frac{PM}{PS}$ s'approchera de même du rapport $\frac{PM}{PT}$ qu'il aura pour limite, et qui sera par conséquent aussi celle du rapport des accroissemens MQ et $M'Q$ que reçoivent simultanément l'abscisse AP et l'ordonnée PM. FIG. 1.

Il suit de-là que lorsque la fonction que représente l'ordonnée sera connue, son coefficient différentiel donnera l'expression du rapport $\frac{PM}{PT}$, et que réciproquement si l'expression de ce rapport est connue d'ailleurs, elle fournira le coefficient différentiel de la fonction correspondante à l'ordonnée (*).

(*) Quoiqu'on ne puisse guère révoquer en doute que deux quantités qui sont la limite d'une même quantité variable soient égales, on a coutume néanmoins de démontrer cette proposition comme il suit.

Soient AB les deux premières quantités, et V la troisième; si l'on avoit $A=B-D$, et que V fût toujours moindre que A, quelque près qu'il fut de cette grandeur, sa différence avec B surpasseroit D. On ne peut pas dire non plus que V soit compris entre A et B, car il différeroit alors de B ou de A d'une quantité au moins égale à $\frac{1}{2}D$; ainsi dans tous les cas V ne pourroit approcher en même temps aussi près qu'on voudra des deux quatités A et B, ce qui est contraire à la définition des limites.

62. Lorsque l'on donne à l'abscisse des valeurs successives, les ordonnées qui répondent à ces valeurs, déterminent sur la courbe des points que l'on peut regarder comme les sommets des angles d'un polygone inscrit à cette courbe.

Si l'on prend, par exemple, sur l'axe des abscisses
FIG. 2. les points P, P', P'', *fig.* 2, distans entr'eux d'une même quantité h, on aura

$$AP=x, \quad AP'=x+h, \quad AP''=x+2h, \text{ etc.}$$

qu'on élève les ordonnées correspondantes PM, $P'M'$, $P''M''$, et que l'on joigne les points M, M', M'', etc. par des cordes, on formera le polygone $MM'M''$, etc. qui différera d'autant moins de la courbe proposée que les points M, M', M'', etc. se rapprocheront, mais en même temps le nombre de ses côtés augmentera de plus en plus, puisque la distance PP' sera contenue un nombre de fois de plus en plus grand dans l'abscisse déterminée AB. La courbe CD sera évidemment la limite de tous ces polygones, et par conséquent les propriétés qui conviendront à cette limite, conviendront aussi à la courbe proposée (*).

(*) Léibnitz a toujours envisagé le Calcul différentiel sous un point de vue à peu près semblable.

« Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenus adhibitas » omnes deduci posse ex generali quodam meo dimetiendorum curvi» lineorum principio, *quod figura curvilinea censenda sit æquipollere* » *polygono infinitorum laterum*; unde sequitur, quicquid de tali po» lygono demonstrari potest, sive ita, ut nullus habeatur ad nu» merum laterum respectus, sive ita, ut tanto magis verificetur, » quanto major sumitur laterum numerus, ita, ut error tandem fiat » quovis dato minor; id de curva posse pronuntiari ». (*Acta Erudi*» *torum ann.* 1684, *page* 585.)

Il est évident que cette métaphysique est aussi très-lumineuse, et ne

Cela posé, si l'on mène MQ et $M'Q'$ parallèles à l'axe AB, $M'Q$ sera la différence des deux ordonnées consécutives PM et PM', $M''Q'$ celle des ordonnées $P'M'$ et $P''M''$. En prolongeant la droite MM' jusqu'en N'', on aura les triangles $MM'Q$, $M'N''Q'$, qui donneront $M'Q = N''Q'$; d'où il suit que

$$M''N'' = N''Q' - M''Q'$$

sera la différence de lignes $M'Q$ et $M''Q'$.

Le calcul différentiel donne l'expression de ces diverses droites; car on a successivement

$$PM = y$$

$$P'M' = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$P''M'' = y + \frac{dy}{dx}\frac{2h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{4h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$P'M' - PM = M'Q = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.}$$

$$P''M'' - P'M' = M'Q' = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{3h^2}{2} + \text{etc.}$$

$$M''Q' - M'Q = M''N'' = \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{etc.}$$

d'où il suit que si l'on prend $h = dx$, la valeur de MQ approchera de plus en plus de la différentielle première dy, celle de $M''N''$, de la différentielle seconde d^2y. En considérant un quatrième point du polygone, on trouveroit de même la ligne correspondante à la différentielle troisième.

63. Les lignes PM, $M'Q$, $M''N''$, ont par rapport au Calcul des limites, une subordination marquée par

---

diffère de celle que nous présentons ci-dessus que parce que la *limite* y est désignée comme un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

les exposans dont l'accroissement h est affecté dans leur premier terme, exposant qui est le même que celui de l'ordre de la différentielle à laquelle ils correspondent. On voit en effet que le rapport de $M'Q$ à PM diminue sans cesse et finit par s'évanouir lorsque $h=0$, qu'il en est de même du rapport de $M''N''$ à $M'Q$; mais que si l'on comparoit la première au quarré de la seconde, le rapport auroit alors une limite assignable qui seroit le rapport de $\frac{d^2y}{dx^2}$ à $\frac{dy^2}{dx^2}$ (*).

64. Les considérations du n°. 61, font connoître la position de la tangente; car elles donnent

$$\frac{PM}{PT}=\frac{dy}{dx}, \text{ fig. 1,}$$

FIG. 1. et le triangle PMT étant rectangle en P, le rapport $\frac{PM}{PT}$ exprime la tangente de l'angle PTM (*Trig.* 29.).

On tire aussi de là

$$PT=\frac{PM}{\frac{dy}{dx}}=\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=\frac{y\,dx}{dy}$$

ce qui donne immédiatement la *soutangente* PT, qu'on emploie le plus ordinairement pour construire la tangente (*Trig.* 146).

Le triangle PMT, rectangle en T, donne la *tangente* ou

$$MT=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{PT}^2}=y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}.$$

(*) Ceci fournit une explication bien simple des différens ordres d'infiniment petits que Léibnitz admettoit. Il regardoit la différentielle première comme infiniment petite à l'égard de l'ordonnée; la différentielle seconde comme infiniment petite à l'égard de la différentielle première, et ainsi de suite. D'après ce principe il négligeoit les unes à l'égard des autres; ce qu'il faut faire en effet lorsque l'on veut passer aux limites.

65.

65. La considération des triangles semblables PMT et PMR (*Trig.* 148), donne la sounormale, ou

$$PR=PM\frac{PM}{PT}=\frac{y\,dy}{dx}.$$

Le triangle PMR, rectangle en P, donne la *normale* ou

$$MR=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{PR}^2}=y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

66. Voici maintenant quelques applications des formules trouvées ci-dessus.

L'équation générale des courbes du second degré étant

$$y^2=mx+nx^2 \text{ (Trig. 144),}$$

on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m+2nx}{2y}=\frac{m+2nx}{2\sqrt{mx+nx^2}},$$

et on tire de là

$$PT=\frac{y\,dx}{dy}=\frac{2(mx+nx^2)}{m+2nx}$$

$$TM=y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}=\sqrt{mx+nx^2+4\left(\frac{mx+nx^2}{m+2nx}\right)^2}$$

$$PR=\frac{y\,dy}{dx}=\frac{m+2nx}{2}$$

$$MR=y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\sqrt{(mx+nx^2)+\tfrac{1}{4}(m+2nx)^2}.$$

Dans le cas où $n=0$, la courbe devient une parabole (*Trig.* 110), et alors on a seulement

$$PT=2x, \qquad TM=\sqrt{x^2}$$

$$PR=\frac{m}{2}, \qquad MR=\sqrt{mx+\tfrac{1}{4}m^2}$$

On déduiroit de ces valeurs, les résultats et les constructions indiquées dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, pour les lignes du second degré.

Dans la courbe représentée par l'équation

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

on trouvera

$$PT = \frac{y^3 - axy}{ay - x^2} = \frac{2axy - x^3}{ay - x^2}$$

valeur qui se construira facilement, lorsqu'on aura assigné celle de x et déterminé celle de y (*Trig.* 76).

67. Il est souvent plus commode, et sur-tout plus élégant, de considérer la tangente et la normale par leur équation (*Trig.* 144). Pour obtenir celle de la première, nous chercherons en général les relations qui doivent avoir lieu lorsque deux lignes se touchent. Considérons d'abord ces lignes comme ayant deux points M et M', *fig.* 1, communs; il est évident que leurs équations doivent donner les mêmes valeurs de l'ordonnée PM et de la différence $M'Q$, correspondantes à l'abscisse AP et à son accroissement PP'. Si donc on désigne par x', y' les coordonnées particulières au point M dans la courbe proposée, et par x, y, celles des points quelconques de la ligne qui la coupe en M et en M', on aura pour ces deux points

FIG. 1.

$$y = y', \quad \frac{dy}{dx}h + \text{etc.} = \frac{dy'}{dx'}h + \text{etc.} \quad (62).$$

La seconde équation est divisible par h, et lorsqu'on en prend la limite en supposant $h = 0$, elle se réduit à

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'};$$

mais dans cette hypothèse les deux points d'intersection se réunissent en un seul qui devient un point de contact pour les lignes proposées puisqu'elles n'ont plus que ce point de commun. Il suit de là que lorsque deux lignes se touchent, on a, pour leur point de contact seulement

$$y=y', \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'}.$$

Appliquons ceci à la ligne droite dont l'équation est de la forme

$$y=Ax+B \text{ (} Trig. \text{ 64), et donne } \frac{dy}{dx}=A.$$

Nous aurons pour le contact de cette droite avec la courbe proposée

$$y'=Ax'+B, \qquad A=\frac{dy'}{dx'},$$

d'où nous conclurons

$$B=y'-x'\frac{dy'}{dx'} \quad \text{et} \quad y=\frac{dy'}{dx'}x+y'-x'\frac{dy'}{dx'},$$

ou $$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x').$$

D'après cette équation, celle de la normale, qui est perpendiculaire à la tangente et qui passe par le point M sera

$$y-y'=-\frac{dx'}{dy'}(x-x') \text{ (} Trig. \text{ 67).}$$

Prenons pour exemple le cercle donné par l'équation

$$y'^2+x'^2=a^2,$$

nous aurons $$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{x'}{y'};$$

l'équation de sa tangente sera par conséquent

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x'), \text{ ou } yy'-y'^2=-xx'+x'^2,$$

ou $$yy'+xx'=a^2,$$

puisque $y'^2+x'^2=a^2$.

L'équation de la normale devient

$$y-y'=\frac{y'}{x'}(x-x'),$$

et se réduit à

$$y=\frac{y'}{x'}x$$

ce qui fait voir que les normales du cercle passent par son centre qui est ici l'origine des coordonnées (*Trig.* 64), et ce qui doit être en effet, puisque les normales d'un cercle ne sont autre chose que ses rayons.

La tangente de la courbe donnée par l'équation

$$x'^3-3ax'y'+y'^3=0,$$

a pour équation

$$y-y'=\frac{ay'-x'^2}{y'^2-ax'}(x-x'),$$

ou

$$yy'^2-ax'y-y'^3+ax'y'=axy'-xx'^2-ax'y'+x'^3.$$

Si l'on met pour y'^3 sa valeur, et qu'on réduise, on obtiendra

$$y(y'^2-ax')+x(x'^2-ay')=ax'y'.$$

68. Si on se proposoit de mener, par un point donné pris hors d'une courbe, et dont α seroit l'abscisse et β l'ordonnée, une tangente à cette courbe, il est évident qu'il faudroit substituer α au lieu de x, et β au lieu de y, dans l'équation de la tangente, qui deviendroit alors

$$\beta-y'=\frac{dy'}{dx'}(\alpha-x')$$

et serviroit, conjointement avec l'équation de la courbe proposée, à déterminer les coordonnées x' et y' du point de contact.

Prenons le cercle pour premier exemple; l'équation de sa tangente étant

$$yy' + xx' = a^2 \text{ (n°. } \textit{précéd.}\text{)},$$

on aura

$$\beta y' + \alpha x' = a^2.$$

Cette équation combinée avec celle du cercle déterminera les coordonnées x' et y' des points de contact, ou, ce qui revient au même, ces points seront à la rencontre du cercle avec la droite exprimée par l'équation

$$\beta y' + \alpha x' = a^2 \text{ (} \textit{Trig.} \text{ 87)}.$$

Dans la courbe représentée par l'équation

$$x'^3 - 3ax'y' + y'^3 = 0,$$

le point de contact se trouveroit en cherchant l'intersection de cette courbe, avec celle du second ordre résultante de l'équation

$$\beta(y'^2 - ax') + \alpha(x'^2 - ay') = a\pm' y'.$$

69. Pour mener une droite qui touche une courbe donnée, et qui soit en même temps parallèle à une droite donnée de position, ou qui fasse, avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente soit représentée par a, il suffira de poser $\frac{dy'}{dx'} = a$ (*Trig.* 66); combinant cette équation avec celle de la courbe proposée, on déterminera les valeurs de x' et de y', qui conviennent au point de contact demandé.

Dans le cas où la courbe proposée seroit la parabole ordinaire, on auroit

$$y'^2 = mx', \qquad \frac{dy'}{dx'} = \frac{m}{2y'} = a,$$

ce qui donneroit

$$y' = \frac{m}{2a} \text{ et } x' = \frac{m}{4a^2}.$$

70. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les coordonnées x et y étoient perpendiculaires entr'elles; mais il est aisé de voir que quand même elles feroient un angle quelconque, le rapport de $M'Q$ à MQ, auroit encore pour limite celui de PM à PT; l'équation de la tangente ne changeroit pas de forme. A l'égard de MT, de MR et de PR, on trouveroit leur expression par le moyen des triangles MPT, MTR et MPR, dans lesquels on connoîtroit toujours ou un angle et deux côtés, ou deux angles et un côté.

71. En cherchant les positions que prend la tangente d'une courbe proposée, lorsque le point de contact s'éloigne de plus en plus de l'origine des coordonnées, on peut reconnoître si cette courbe a, comme l'hyperbole, des lignes droites pour asymptotes (*Trig.* 150), et déterminer leur position.

FIG. 3. On voit en effet que dans une courbe MX, *fig.* 3, qui a une asymptote RS, à mesure que le point M s'éloigne de l'origine, la tangente MT s'approche de l'asymptote, et les points T et D marchent respectivement vers les points R et E, en sorte que AR et AE sont des limites que les valeurs de AT et de AD ne sauroient franchir, ni même atteindre, mais dont elles peuvent approcher aussi près qu'on voudra. Il suit de-là que pour trouver si une courbe a des asymptotes, il faut chercher si les expressions de AT et de AD relatives à cette courbe, sont susceptibles de limites finies; et lorsque cela arrivera, ces limites étant construites, donneront les deux points R et E, par lesquels on menera la droite RS, qui sera l'asymptote demandée.

Les expressions de AT et de AD se tirent de celle de PT; la première en observant que $AT=AP-PT$; la seconde par le moyen des triangles semblables ADT

et MPT; on les déduit aussi de l'équation de la tangente en faisant successivement $y=0$ et $x=0$ (*Trig.* 64). On trouvera

$$AT=x'-y'\frac{dx'}{dy'}, \qquad AD=y'-x'\frac{dy'}{dx'}.$$

72. Appliquons ce qui précède à l'équation

$$y'^2=mx'+nx'^2;$$

nous en tirerons

$$AT=x'-\frac{2y'^2}{m+2nx'}=\frac{-mx'}{m+2nx'},$$

$$AD=y'-\frac{mx'+2nx'^2}{2y'}=\frac{mx'}{2\sqrt{mx'+nx'^2}};$$

les derniers membres de ces équations peuvent être mis sous les formes,

$$-\frac{m}{\frac{m}{x'}+2n} \text{ et } \frac{m}{2\sqrt{\frac{m}{x'}+n}},$$

par conséquent leurs limites respectives, dans le cas où on suppose x' infini, sont

$$-\frac{m}{2n}=AR \text{ et } \frac{m}{2\sqrt{n}}=AE.$$

Si n étoit nulle, les expressions de AT et de AD deviendroient infinies en même temps que x', et la courbe proposée n'auroit point d'asymptotes; elle n'en aura pas non plus, lorsque n sera négative, parce qu'alors son équation n'admettra point pour x une valeur infinie.

Considérons encore la courbe représentée par l'équation

$$x'^3-3ax'y'+y'^3=0;$$

on a dans cette courbe

$$AT=\frac{ax'y'}{x'^2-ay'}, \qquad AD=\frac{ax'y'}{y'^2-ax'}$$

Pour trouver la limite vers laquelle tendent ces e
pressions, à mesure que y' augmente, il faudroit sul
tituer au lieu de y' la limite vers laquelle il tend, et co
noître par conséquent l'expression de y' en x'; mais
peut suppléer à cette expression, dans l'exemple prése
par un artifice analytique fort simple. Si on fait $x' = t$
l'équation proposée deviendra divisible par y'^2, et on
tirera $y' = \frac{3at}{1+t^3}$. Il est facile de voir maintenant que
supposition de $t = -1$, rendra y' infini, et donn
$x' = -y'$; en changeant x' en y' dans les expressions
AT et de AD, et prenant les limites, on aura

$$AR = -a = AE.$$

FIG. 4. Menant donc par les points R et E, *fig.* 4, construits a
les valeurs précédentes, la droite RE, elle sera l'asym
tote des branches AY et AZ.

73. Si l'une des quantités AR ou AE restant fin
l'autre devenoit infinie, il est évident que l'asympt
seroit parallèle à l'axe sur lequel se trouve cette dernié

Pour ne manquer aucune des asymptotes que doit av
la courbe proposée, il faut donc faire successivem
x' infini et y' infini, et substituer dans les expressions
AT et de AD, chacun des résultats différens que do
l'une et l'autre hypothèse. Lorsque AT et AD ser
toujours infinies en même temps, on en conclura que
courbe proposée n'a pas d'asymptote.

Il pourroit arriver que ces quantités fussent toutes de
nulles: dans ce cas la courbe auroit pour asymptote
droite menée par l'origine des coordonnées; mais com
on n'en connoîtroit alors qu'un point, il faudroit en ch
cher la direction, et pour cela on prendroit la limite
l'expression $\frac{dy'}{dx'}$, qui représente la tangente de l'an

MTP (64), pour un point quelconque de la courbe, et on auroit la tangente de l'angle *SRB*.

Recherche des points singuliers des courbes.

74. On appelle *points singuliers* d'une courbe ceux dans lesquels elle offre quelque circonstance remarquable. Je vais faire connoître successivement chaque espèce de ces points en particulier, en montrant comment elle résulte des diverses formes que peuvent prendre les coefficiens différentiels de la fonction qui représente l'ordonnée de la courbe proposée.

Lorsque le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, qui exprime la tangente de l'angle *PTM* (69), est nul, il s'ensuit que la droite qui touche la courbe au point *M* est parallèle à la ligne des abscisses, et s'il change de signe après ce point, la tangente incline alors du côté de l'ordonnée opposé à celui où elle inclinoit d'abord. L'inspection des deux figures citées, montre que dans ce cas, l'ordonnée, après avoir atteint une certaine grandeur, vient à diminuer (*fig.* 5), ou bien qu'après avoir diminué jusqu'à certain point, elle vient à croître (*fig.* 6). FIG. 5 et 6.

La première circonstance répond évidemment au *maximum* de l'ordonnée y, et la seconde à son *minimum*. Quand l'un et l'autre ont lieu, on a donc également $\frac{dy}{dx} = 0$, ainsi qu'on l'a déjà fait voir par les considérations analytiques (48).

75. Les considérations géométriques prouvent aussi que ce caractère ne convient pas seulement aux points où il y a *maximum* ou *minimum*, mais qu'il a encore

lieu dans d'autres circonstances. Quoique la tangente
FIG. 7. au point M de la figure 7 soit parallèle à la ligne des abscisses, ce point ne correspond pourtant pas à un *maximum*, parce qu'au-delà l'ordonnée continue à croître; mais il faut remarquer que la concavité de la courbe, d'abord tournée vers l'axe des abscisses, ou placée au-dessous de la tangente, est ensuite tournée du côté opposé. Cette circonstance est ce qu'on appelle une *inflexion*, et le point M est un point d'inflexion.

On voit que ce point se reconnoîtra en cherchant la position de la courbe, par rapport à sa tangente, avant et après.

L'équation de la tangente étant en général

$$(y-y')=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}(x-x')\,(67),$$

on aura, en faisant $x=x'+h$,

$$y-y'=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}h,$$

ou

$$y=y'+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}h,$$

FIG. 8. pour l'expression de $P'N'$, *fig.* 8, qui est l'ordonnée de la tangente correspondante au point P' dont l'abscisse est $x'+h$; mais puisque y' est une fonction de x', on aura (21) pour $P'M'$ cette série

$$y'+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}x'^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3y'}{\mathrm{d}x'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

d'où on déduira

$$P'M'-P'N'=\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}x'^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3y'}{\mathrm{d}x'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Prenant sur l'axe des abscisses un point P, en ar-

rière du point P, et dont l'abscisse soit $x'-h$, on trouveroit de même

$$P_iM_i-P_iN_i=\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Il est évident maintenant que si $\frac{d^2y'}{dx'^2}=0$, les deux différences

$$P_iM_i-P'N'=\frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$P_iM_i-P_iN_i=-\frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

seront de signes contraires, au moins lorsqu'on prendra h assez petite pour que le premier terme de la série soit plus grand que la somme des autres (48); ainsi la courbe proposée, après avoir été au-dessous de sa tangente, passera au-dessus, *et vice versâ*.

Il y aura donc au point M_i, *fig.* 7, *inflexion* et non pas *maximum* ou *minimum*, si $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ y devient nul en même temps que $\frac{dy'}{dx'}$, et en général si le premier des coefficiens différentiels qui ne s'anéantissent pas est d'un ordre impair. Voilà donc la signification géométrique des caractères analytiques indiqués dans le n°. 49.

76. Il peut y avoir inflexion dans des points où la tangente n'est pas parallèle à la ligne des abscisses et où l'on n'ait pas par conséquent $\frac{dy'}{dx'}=0$. Dans ce dernier cas, on reconnoît encore qu'il y a inflexion en observant que c'est le signe du coefficient $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ qui détermine en

général comment la concavité de la courbe se trouve placée par rapport à l'axe des abscisses. En effet, si l'on regarde comme positives les ordonnées situées au-dessus de l'axe des abscisses, on verra par les figures 9 et 10 que lorsque la différence

FIG. 9 et 10.

$$P'M' - P'N' = \frac{d^2y'}{dx'^2}h + \text{etc.}$$

est positive, la courbe est placée au-dessus de sa tangente, elle tourne par conséquent sa convexité vers l'axe des abscisses lorsque l'ordonnée est positive, *fig.* 9, et sa concavité lorsque l'ordonnée est négative, *fig.* 10, et cela indépendamment du signe de h, puisque h est toujours une quantité positive. Mais quand la même différence est négative, le contraire a lieu ; la courbe est placée au-dessous de sa tangente, et tourne par conséquent sa concavité vers l'axe des abscisses lorsque l'ordonnée est positive, *fig.* 10, et sa convexité lorsque l'ordonnée est négative, *fig.* 9.

Il suit de là que *la courbe est convexe vers l'axe des abscisses toutes les fois que l'ordonnée* y' *et le coefficient différentiel* $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ *sont de même signe, et elle est concave vers cet axe, dans le cas contraire.*

Si donc le signe de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ change avant ou après le point M de la courbe, il y aura une inflexion à ce point. On sait déjà que toute quantité entière ne peut changer de signe qu'en passant par zéro ; mais il est facile de voir qu'une quantité fractionnaire peut changer de signe en passant par l'infini, ainsi que cela arrive à l'expression $\frac{a}{x}$, qui devient successivement

$\frac{a}{b}$, $\frac{a}{0}$, $-\frac{a}{b}$, lorsqu'on y fait $x=b$, $x=0$, $x=-b$: on peut donc conclure de ce qui précède que pour *un point d'inflexion* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *est nul ou infini;* mais il ne faut pas renverser cette proposition.

77. Quand $\frac{dy}{dx}$ au lieu de s'évanouir devient infini, l'ordonnée devient tangente comme en E, *fig.* 11; cette circonstance répond à une *limite* de la courbe dans le sens des abscisses, c'est-à-dire, à un *maximum* ou à un *minimum* de l'abscisse, à moins qu'il n'y ait en ce point une inflexion dans laquelle la tangente soit perpendiculaire à la ligne des abscisses. FIG. 11.

78. Nous avons montré, n°. 55, que $\frac{dy}{dx}$ devenoit infini lorsque quelque radical disparoissoit, ou que pour une seule valeur de y, l'accroissement dy devoit, contre la règle ordinaire, en avoir plusieurs; cette circonstance se trouve au point E. En effet, il est visible que pour l'abscisse Ac, consécutive à AC, la courbe a deux ordonnées, et que par conséquent la même ordonnée CE a deux différences, l'une $ce'-CE$, et l'autre $CE-ce$.

Il en arrive autant au point G, où deux branches de la courbe se coupent; l'ordonnée particulière FG a aussi pour le même accroissement d'abscisse Ff deux différences, l'une $fg'-FG$, l'autre $FG-fg$; mais dans les autres parties de la courbe, une même ordonnée n'a pour chaque accroissement d'abscisse qu'une seule différence.

Les points qui sont l'intersection de plusieurs branches comme G, ou la réunion de deux branches GDE

et $GD'E$, comme E, sont nommés points *multiples*. On les reconnoît parce qu'une seule ordonnée a pour une même abscisse plusieurs différentielles, ce qui fait que le coefficient différentiel y devient infini. Il peut aussi s'y montrer sous la forme $\frac{0}{0}$, et cela arrive toujours lorsque son expression contient en même temps les deux variables x et y.

Dans chacun de ces points la courbe a plusieurs tangentes. En G, par exemple, elle en a deux bien distinctes ; en E elle en a encore deux, mais réunies en une seule, qui est la limite de celles de la branche supérieure $GD'E$ et de celles de la branche inférieure GDE.

79. Les points multiples prennent quelquefois deux formes particulières auxquelles on a donné le nom de *rebroussement*, parce que les branches de courbe qui s'y rencontrent ne s'étendent pas au-delà. Celui de la fig. 12, dans lequel les deux branches s'opposent leur convexité est le *rebroussement de la première espèce* ; et celui de la fig. 13, dans lequel les deux branches tournent leur concavité du même côté est le *rebroussement de la seconde espèce*.

FIG. 12 et 13.

Ces points n'ont qu'une seule tangente, mais qu'on doit regarder comme double, ainsi que celle du point E dans la fig. du n°. précéd. et ils se distinguent des autres points multiples par la marche que tient la courbe avant et après à l'égard de sa tangente, et qu'on peut reconnoître par le signe du coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ (76), en prenant successivement pour x deux valeurs, l'une plus grande et l'autre plus petite que l'abscisse qui correspond au point multiple qu'on se propose d'examiner.

80. Tout ce qui précède peut être réduit à cette règle

très-simple : *on obtiendra généralement l'indication de l'abscisse à laquelle répond un point singulier, en cherchant dans quels cas les coefficiens différentiels, à partir d'un ordre quelconque, deviennent nuls ou infinis ou* $\frac{0}{0}$; *l'on assignera l'espèce du point en examinant si les branches de la courbe qui passent par ce point s'étendent ou non au-delà, et en déterminant leur position par rapport à l'axe des abscisses, soit avant, soit après le même point.*

81. La *famille* de courbes représentées par l'équation très-simple,

$$y = b + c(x-a)^m$$

nous fournira des exemples de chacune des particularités que nous venons d'indiquer. On en tire

$$\frac{dy}{dx} = mc(x-a)^{m-1};$$

ce coefficient s'évanouit par la supposition de $x=a$, lorsque $m>1$: la droite qui touche la courbe proposée au point correspondant à l'abscisse a, est donc parallèle à l'axe des abscisses ; mais pour savoir s'il y a *maximum* ou *minimum*, ou bien *inflexion*, il faut examiner les coefficiens différentiels des ordres supérieurs.

1°. Il est visible que si l'exposant m est entier et positif, la valeur $x=a$ fera disparoître tous les coefficiens différentiels de y, jusqu'à celui de l'ordre m exclusivement, qui sera

$$\frac{d^m y}{dx^m} = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 1.c;$$

et il y aura par conséquent pour les valeurs de m paires, *maximum* si c est négatif, *minimum* si c est positif

(48), et *inflexion* pour les valeurs impaires de l'exposant m (76).

2°. Si l'exposant m est fractionnaire, et qu'on ait $m=\frac{p}{q}$, le coefficient différentiel d'un ordre quelconque n sera

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\ldots\left(\frac{p}{q}-n+1\right)c(x-a)^{\frac{p-nq}{q}}$$

$$=\frac{p(p-q)\ldots\ldots(p-(n-1)q)}{q^n}c(x-a)^{\frac{p-nq}{q}}.$$

Il est évident par cette expression que tous les coefficiens différentiels, quand on y fera $x=0$, s'anéantiront pour toutes les valeurs de $n<\frac{p}{q}$ et deviendront infinis pour $n>\frac{p}{q}$.

Il seroit facile de découvrir le signe du dernier de ceux qui s'anéantiront; mais sans entrer dans ce détail, je me bornerai à chercher ce que devient le coefficient

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p(p-q)}{q^2}c(x-a)^{\frac{p-2q}{q}}$$

lorsque $x>a$ et $x<a$ (80). Le facteur $\frac{p(p-q)}{q^2}$ est constamment positif puisqu'on suppose $p>q$; le facteur $(x-a)^{\frac{p-2q}{q}}$ ne changera pas de signe entre $x<a$ et $x>a$, si le nombre p est pair: dans ce cas la courbe aura l'une des formes que représente la fig. 14.

Le facteur $(x-a)^{\frac{p-2q}{q}}$ change de signe au contraire quand p est impair; mais il faut alors distinguer le cas

cas où q seroit pair, de celui où q seroit impair. Dans le premier, l'ordonnée y et ses coefficiens différentiels devenant imaginaires lorsque $x<a$, la courbe proposée s'arrête au point C, *fig.* 15, où $x=a$; et comme on FIG. 15.
a de plus pour la même abscisse

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{p(p-q)}{q^2}c(x-a)^{\frac{p-2q}{q}},$$

il s'ensuit que le point C est la réunion de deux branches, l'une convexe vers l'axe des abscisses, et l'autre concave, et que par conséquent ce point est un *rebroussement* de la première espèce.

Lorsque p et q sont tous deux impairs, le facteur $(x-a)^{\frac{p-2q}{q}}$ change de signe entre $x<a$ et $x>a$, et la courbe proposée a la forme représentée *fig.* 16; le FIG. 16.
point C est une *inflexion*.

3°. Si l'exposant $m<1$, comme on auroit alors

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mc}{(x-a)^{1-m}},$$

la valeur $x=a$ rendroit le coefficient différentiel infini; la droite qui touche la courbe au point où $x=a$, seroit perpendiculaire à l'axe des abscisses. On trouveroit, par des considérations semblables aux précédentes, que le point C est une *limite* de la courbe suivant l'axe des abscisses, lorsque m est une fraction $\frac{p}{q}$, dont le numérateur est pair, et le dénominateur impair; que ce point est un rebroussement lorsque p est impair et q pair, enfin une inflexion lorsque p et q sont tous deux impairs (*).

(*) Le rebroussement de la fig. 17 pourroit à la rigueur être pris pour un *maximum*, et celui de la fig. 18 pour un *minimum*. FIG. 17 18.

Les mêmes choses auroient lieu dans les mêmes circonstances, si l'exposant m étoit négatif.

82. Nous trouverons dans la courbe représentée par l'équation

$$(y-x^2)^5=x^5$$

un exemple du rebroussement de la *seconde espèce* (78): dans cette courbe

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}.$$

Pour savoir si elle a quelque point singulier, il faut chercher si quelqu'un des coefficiens différentiels de la fonction y ne devient pas nul ou infini. On obtient d'abord

$$\frac{dy}{dx}=2x\pm\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}},\qquad \frac{d^2y}{dx}=2\pm\frac{5}{2}.\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}};$$

le premier de ces résultats s'évanouit quand $x=0$, le second se réduit à 2; et l'on voit ensuite que le troisième coefficient différentiel,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\pm\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

devient infini dans ce cas: le point correspondant à $x=0$, est donc *un point singulier*. Il est d'abord évident que ce point est une limite de la courbe qui ne s'étend pas du côté des abscisses négatives, puisque le terme $x^{\frac{5}{2}}$ devient alors imaginaire. Les valeurs du coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont toutes deux positives quand x est très-petit et de même signe que celle de y; les deux branches de la courbe tournent donc en même temps leur convexité vers l'axe des abscisses AB, *fig.* 13: elles se touchent au point A, car elles y ont pour tangente commune l'axe AB, puisqu'à ce point $\frac{dy}{dx}=0$. Il ré-

FIG. 13.

sulte de l'ensemble de ces caractères que la forme de la courbe en ce point est telle que la représente la figure.

83. Les courbes offrent quelquefois des points isolés qui ont le caractère des points multiples; mais on les en distingue, parce que le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ prend pour les premiers une valeur imaginaire.

Soit l'équation

$$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y = \sqrt{\frac{x^2(x-b)}{a}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(3x-2b)}{2\sqrt{ax^2(x-b)}}.$$

Le coefficient différentiel devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=0$; mais on peut en avoir la vraie valeur en supprimant le facteur x, commun aux deux termes de la fraction: on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x-2b}{2\sqrt{a(x-b)}};$$

faisant alors $x=0$, il en résulte

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2b}{2\sqrt{-ab}},$$

expression imaginaire.

Dans la même hypothèse l'équation proposée donne $y=0$; mais cette ordonnée, qui est imaginaire lorsque x est négatif, redevient encore telle jusqu'à ce que $x=b$; ainsi le point A, *fig.* 20, quoique compris dans l'équation de la courbe, en est absolument détaché.

Les points de cette espèce se nomment points *con-*

343741

jugués ; ils résultent de ce qu'une portion finie de la courbe proposée, s'évanouit par la détermination particulière de quelque constante de son équation. La courbe représentée par l'équation

$$ay^3 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0,$$

qui donne

$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x-b)(x+c)}{a}},$$

offre un exemple de ces changemens; elle a d'abord le cours représenté dans la *fig.* 19, la supposition de $c=0$ réduit la partie AF au seul point A, *fig.* 20, comme on l'a vu ci-dessus : elle prend la *fig.* 21 lorsque $b=0$, sans que c s'évanouisse, et la *fig.* 22, si l'on fait en même temps $b=0$, $c=0$.

FIG. 19. 20, 21 et 22.

Les courbes ont aussi quelquefois des points singuliers qui ne sont pas visibles : ce sont ceux qui résultent d'un nombre pair d'inflexions qui se réunissent en une seule (voyez pour ces points et pour ceux de *serpentement* dont ils dérivent, le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*).

84. On suppose ordinairement comme une chose évidente qu'*un petit arc de courbe peut être pris pour sa corde*, c'est-à-dire que *le rapport de l'arc et de sa corde a pour limite l'unité.* Cette proposition, très-importante, a néanmoins besoin d'être démontrée, et peut l'être comme il suit.

Le triangle rectangle $MM'Q$, *fig.* 23, donne

FIG. 23.

$$MM' = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2},$$

on a de plus (62)

$$MQ = h, \; M'Q = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

on peut mettre ce développement sous la forme

$$(p+Ph)h,$$

en faisant

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}=Ph^2 \text{ et } \frac{dy}{dx}=p;$$

on obtiendra

$$MM'=\sqrt{h^2+(p+Ph)^2h^2}=h\sqrt{1+(p+Ph)^2}.$$

Menant ensuite la tangente MN, on trouvera

$$NQ=MQ\,\text{tang.}\,NMQ=\frac{dy}{dx}h=ph \quad (64)$$

$$MN=\sqrt{h^2+p^2h^2}=h\sqrt{1+p^2}$$

$$M'N=NQ-M'Q=\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}=Ph^2.$$

On conclura delà

$$\frac{MN+M'N}{MM'}=\frac{h\sqrt{1+p^2}+Ph^2}{h\sqrt{1+(p+Ph)^2}}=\frac{\sqrt{1+p^2}+Ph}{\sqrt{1+(p+Ph)^2}}$$

ce rapport a pour limite

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}=1.$$

Mais l'arc MOM' est toujours compris entre la corde MM' et la ligne brisée $MN+M'N$; donc, à plus forte raison le rapport $\frac{MOM'}{MM'}$ a pour limite l'unité.

85. Il est évident que l'arc d'une courbe est une fonction de l'abscisse; pour avoir le coefficient différentiel de cette fonction, il faut chercher la limite du

rapport $\frac{MOM'}{PP'}$; or on a

$$\frac{MOM'}{PP'} = \frac{MM'}{PP'} \times \frac{MOM'}{MM'}.$$

Substituant la valeur du premier rapport du second membre, faisant $h = 0$ pour passer à la limite, le deuxième rapport deviendra l'unité, et l'on aura $\sqrt{1+p^2}$; si l'on nomme donc z l'arc CM, il viendra

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \text{ ou } dz = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Le cercle dont l'équation est

$$x^2+y^2=a^2,$$

donnant

$$x\,dx+y\,dy=0, \text{ ou } dy=-\frac{x\,dx}{y}$$

il vient

$$dz=\sqrt{dx^2+\frac{x^2dx^2}{y^2}}=\frac{dx}{y}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\frac{a\,dx}{y}=\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

résultat qui rentre dans celui du n°. 35, lorsqu'on suppose $a=1$.

86. la différentielle de l'aire d'une courbe s'obtient avec encore plus de facilité, en observant que le rapport des rectangles $PP'QM$ et $PP'M'N$, *fig.* 24, qui ont même base, est égal à $\frac{P'M'}{PM}$, et que sa limite est par conséquent l'unité. Il suit delà que le trapèze curviligne $PP'MM'$, toujours compris entre les deux rectangles

FIG. 24.

dont on vient de parler, et représentant l'accroissement que reçoit le segment $ACMP$ lorsque l'abscisse augmente de PP', tend sans cesse à devenir égal au rectangle $PP'QM$, ou que le rapport

$$\frac{PP'M'M}{\overline{PP'}\times\overline{PM}}=\frac{PP'M'M}{PP'}\times\frac{1}{PM}$$

a pour limite l'unité. En nommant donc s la fonction de x, correspondante à l'aire $ACMP$, on aura pour la limite

$$\frac{PP'MM'}{PP'}=\frac{ds}{dx}$$

et $$\frac{ds}{dx}\times\frac{1}{y}=1 \text{ ou } ds=y\,dx.$$

Dans le cercle on a

$$ds=dx\sqrt{a^2-x^2};$$

ainsi, quoiqu'on ne puisse pas assigner l'expression analytique du segment circulaire, on parvient à celle de sa différentielle par la considération des limites.

Exemple de l'analyse d'une courbe.

87. On divise les lignes en différens ordres d'après le degré de leur équation. La ligne droite forme le premier ordre, parce qu'elle représente l'équation générale du premier degré à deux indéterminées. Les lignes du second ou du troisième ordre sont celles dont les équations montent au second ou au troisième degré, et ainsi des autres. Newton considérant que le premier ordre ne renfermoit que la ligne droite et que les courbes ne commençoient à se montrer que dans le second, divisa ces dernières en genres, et nomma courbes du premier genre, les lignes du second ordre, courbes

du deuxième genre celles du troisième ordre, et ainsi de suite.

Les lignes d'un même ordre se subdivisent en espèces par la considération des principales circonstances de leur cours.

S'il étoit possible de résoudre les équations de tous les degrés, rien ne seroit plus facile que de suivre le cours de la courbe représentée par une équation algébrique quelconque. En effet, supposons que cette équation étant résolue par rapport à l'une des indéterminées qu'elle renferme, y, par exemple, ait donné les différentes racines X', X'', X''', etc. qui seront nécessairement des fonctions de x et de constantes; la question se réduira à examiner en particulier le cours de chacune des lignes produites par les équations

$$y=X', \quad y=X'', \quad y=X''', \text{ etc.}$$

lorsqu'on donne à x toutes les valeurs tant positives que négatives, que peuvent admettre les fonctions X', X'', X''', etc. sans cesser d'être réelles. Ces lignes seront autant de branches de la courbe que représente l'équation proposée.

L'etendue de chaque branche sera déterminée par celle que comprennent les diverses solutions dont est susceptible l'équation qui la représente en particulier. Si parmi les quantités X', X'', X''', etc. il s'en trouve qui deviennent infinies, ou dans lesquelles on puisse supposer x infini, il en naîtra des branches dont le cours sera infini, puisqu'elles pourront s'éloigner indéfiniment de l'un des axes ou de tous les deux à la fois.

Une branche ne s'arrête que parce que l'expression de son ordonnée devient imaginaire, mais le cours de la courbe proposée n'est pas interrompu pour cela; il arrive seulement alors que deux branches se réunissent et

se continuent réciproquement. On s'en convaincra en observant que les valeurs imaginaires de y sont nécessairement en nombre pair, et que celles d'un même couple, ont été réelles et égales avant de devenir imaginaires. En effet, l'équation proposée pouvant toujours se décomposer en facteurs réels du premier et du second degré, si on représente par $y^2 - 2Py + Q = 0$ un de ces derniers, on verra que ses racines, $P \pm \sqrt{P^2 - Q}$, ne deviennent imaginaires qu'à cause que Q devient plus grand que P^2, de moindre qu'il étoit d'abord, et qu'il y a par conséquent un point où les fonctions de x que désignent les lettres P et Q, sont telles qu'on a $P^2 = Q$, ce qui anéantit la quantité radicale, et donne pour y deux valeurs égales.

Si plusieurs branches se coupent dans un point, il arrivera aussi qu'un pareil nombre de valeurs de y deviendront égales.

88. Soit l'équation

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0.$$

Cette équation résoluble, soit par rapport à y, soit par rapport à x, donne dans le premier cas

$$y = \pm \sqrt{48a^2 \pm \sqrt{2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4}}.$$

En discutant chacune des valeurs de y, comme on l'a fait à l'égard de celles de l'équation générale du second degré à deux indéterminées (*Trig.* 103 et suiv.), on pourroit découvrir l'étendue et les limites des branches dont la courbe proposée se forme, déterminer les points où elles rencontrent les axes (*Trig.* 63), où elles se coupent ou se réunissent; mais l'application du Calcul différentiel abrégera beaucoup ces recherches, et aura l'avantage de

montrer comment elles peuvent s'effectuer lors même que l'équation de la courbe proposée est d'un degré trop élevé pour qu'on puisse obtenir l'expression générale de l'une des variables par le moyen de l'autre.

89. Pour déterminer les limites de la courbe dans le sens des ordonnées, ou découvrir si y est susceptible de *maximum* ou de *minimum*, on examinera dans quel cas le coefficient différentiel

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-50a^2x}{y^3-48a^2y}$$

devient nul; on aura

$$x^3-50a^2x=0,$$

d'où $\qquad x=0, \qquad x=\pm 5a\sqrt{2}.$

La première valeur de x, subtituée dans l'équation proposée, donne

$$y=0 \text{ et } y=\pm 4a\sqrt{6}$$

Les deux valeurs de y, égales à $\pm 4a\sqrt{6}$, donnent
FIG. 25. les points D et D', *fig.* 25, situés l'un au-dessus de l'axe des abscisses, l'autre au-dessous, et qui sont de véritables *maxima*. On s'en convaincroit, soit en cherchant ce que devient alors $\frac{d^2y}{dx^2}$, soit en vérifiant par l'expression de y, si les valeurs des ordonnées qui précèdent et qui suivent immédiatement, sont toutes deux plus petites que $4a\sqrt{6}$.

90. Le concours des deux valeurs $x=0$, et $y=0$, indique le point A, et rend en même temps $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Pour savoir ce que signifie cette dernière expression qui ca-

ractérise en général un point multiple, il faudroit recourir au procédé du n°. 56; mais on peut y parvenir en cherchant le coefficient différentiel du second ordre. Pour cela, j'observe que la différentielle première de l'équation proposée est

$$(y^3 - 48a^2y)\,dy + (50a^2x - x^3)\,dx = 0,$$

et la différentielle seconde

$$\left.\begin{aligned}(y^3 - 48a^2y)\,d^2y + (3y^2 - 48a^2)\,dy^2 \\ + (50a^2 - 3x^2)\,dx^2\end{aligned}\right\} = 0,$$

et que, dans le cas où x et y s'évanouissent, celle-ci se réduit à

$$-48a^2\,dy^2 + 50a^2\,dx^2 = 0,$$

que par conséquent elle donne, pour ce cas seulement, les valeurs du coefficient $\frac{dy}{dx}$, qu'on ne peut alors tirer de la différentielle première; on a en effet

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\tfrac{50}{48}} = \pm\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Il suit de ces valeurs que la courbe a au point A deux tangentes, qui font, avec l'axe des abscisses, des angles dont les tangentes trigonométriques sont respectivement

$$\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad -\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

et qu'il est par conséquent aisé de construire (*).

(*) On parviendra en général, comme ci-dessus, à trouver la vraie valeur de $\frac{y}{dx}$, dans le cas où il devient $\frac{0}{0}$, en examinant les différentielles successives de l'équation proposée, et en descendant jusqu'à l'ordre dont l'exposant est égal au nombre de valeurs que doit avoir $\frac{dy}{dx}$.

Il reste à examiner les racines

$$x^2 = \pm 5a\sqrt{2}.$$

En les substituant dans l'équation proposée, elles rendent y imaginaire, et ne donnent par conséquent ni *maximum* ni *minimum*.

91. Pour obtenir les limites de la courbe dans le sens des abscisses, ou ce qui revient au même, les *maxima* et les *minima* de x (77), on égalera à o le dénominateur de la fraction qui exprime $\frac{dy}{dx}$, ce qui fournira l'équation $y^3 - 48a^2y = 0$, d'où $y = 0$ et $y = \pm\sqrt{48a^2}$. La première valeur donne $100a^2x^2 - x^4 = 0$, et l'on en conclut $x = 0$, $x = \pm 10a$. La première de ces valeurs indique encore le point multiple placé à l'origine A, mais les deux autres répondent aux points I et I', où la courbe rencontre l'axe des abscisses AB, et que nous ne connoissions pas encore.

Les deux dernières valeurs $y = \pm\sqrt{48a^2} = \pm 4a\sqrt{3}$ conduisent à $x = \pm 6a$, et $x = \pm 8a$: l'un de ces résultats fait connoître le point F et ses analogues, l'autre donne H et ses analogues. On observera qu'aux points F et I l'abscisse est un *maximum*, et qu'elle est un *minimum* au point H, puisque dans le premier cas la courbe tourne sa concavité vers l'axe AC des ordonnées, auquel elle présente sa convexité dans le second.

92. Pour achever de déterminer les principales circonstances de la courbe proposée, il nous reste à trouver la nature de ses branches infinies et ses points d'inflexion, car connoissant ses divers points multiples, nous savons déjà qu'elle n'a aucun rebroussement. Commençons par

nous occuper des branches infinies; on voit facilement que x et y deviennent infinis en même temps, et si l'on donne à l'équation

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0,$$

la forme suivante

$$\frac{y^4}{x^4} - 96\frac{a^2}{x^2}\frac{y^2}{x^2} + 100\frac{a^2}{x^2} - 1 = 0,$$

on trouvera que le rapport $\frac{y}{x}$ a pour limite l'unité. Faisant $y = x$ dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$, et prenant la limite (73), on trouvera encore l'unité, d'où il suit que la branche X et ses analogues tendent sans cesse à faire un angle de 0°,5 avec l'axe des abscisses.

On aura ensuite (71)

$$x - y\frac{dx}{dy} = \frac{x^4 - 50a^2x^2 - y^4 + 48a^2y^2}{x^3 - 50a^2x}$$

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{y^4 - 48a^2y^2 - x^4 + 50a^2x^2}{y^3 - 48a^2y};$$

Ces expressions qui, lorsqu'on y met pour x^4 sa valeur, se réduisent à

$$\frac{50a^2x^2 - 48a^2y^2}{x^3 - 50a^2x}, \qquad \frac{48a^2y^2 - 50a^2x^2}{y^3 - 48a^2y}$$

diminuent sans cesse à mesure que x et y augmentent, et n'ont que zéro pour limite. On voit par là que la courbe proposée a pour asymptotes deux droites menées par l'origine A, et faisant un angle de 0°,5 avec l'axe des abscisses. On n'a point mené ces droites pour ne pas trop compliquer la figure.

93. Passons maintenant à la recherche des inflexions. On a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3x^2-50a^2)-(3y^2-48a^2)\frac{dy^2}{dx^2}}{y^3-48a^2y};$$

cette expression devient $\frac{0}{0}$, lorsque y et x sont nuls, cas dans lequel $\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{50}{48}$; pour trouver sa vraie valeur il faudra chercher la différentielle troisième de l'équation proposée; faisant dans le résultat x et y égaux à zéro, on aura seulement $-144a^2\,dy\,d^2y=0$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, et prouve que le point A est en effet un point d'inflexion.

Pour voir si la courbe proposée en a encore d'autres, il faut égaler le numérateur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ à zéro, et il viendra l'équation

$$3x^2-50a^2-(3y^2-48a^2)\frac{dy^2}{dx^2}=0;$$

mettant pour $\frac{dy^2}{dx^2}$ sa valeur, et faisant disparoître le dénominateur, on aura

$$(3x^2-50a^2)(y^3-48a^2y)^2$$
$$-(3y^2-48a^2)(x^3-50a^2x)^2=0:$$

on peut donner à cette équation la forme suivante :

$$y^2(y^2-48a^2)^2(3x^2-50a^2)$$
$$-x^2(x^2-50a^2)^2(3y^2-48a^2)=0.$$

Si maintenant on observe que l'équation proposée revient elle-même à celle-ci,

$$(y^2-48a^2)^2-(x^2-50a^2)^2+196a^4=0,$$

et qu'on prenne la valeur de $(y^2-48a^2)^2$, pour la substituer dans la précédente, on trouvera après les réductions

$$(x^2-50a^2)^2(25y^2-24x^2)$$
$$+98a^2y^2(3x^2-50a^2)=0:$$

cette dernière combinée avec la proposée, servira à déterminer les abscisses et les ordonnées du point d'inflexion K et de ses analogues dans les autres branches; on en tirera facilement la valeur de y^2, et en la substituant dans l'équation de la courbe proposée, on aura un résultat qui ne contiendra plus que x.

En faisant $\frac{d^2y}{dx^2}$ infini, ou en égalant à zéro son dénominateur y^3-48a^2y, on trouvera

$$y=0 \text{ et } y=\pm\sqrt{48a^2}:$$

ces valeurs ne nous apprennent rien de nouveau; la première appartient au point A que nous avons déjà remarqué, et la seconde aux points F et H, que nous savons n'être pas des points d'inflexion, mais seulement des limites de la courbe dans le sens de ses abscisses.

En rapprochant tout ce qui précède, on voit que la forme de la courbe proposée, est successivement déterminée par les circonstances qu'offrent les points A, D, F, I, H, K et les branches infinies X et X'.

Des courbes osculatrices.

94. C'est en rapportant une courbe à sa tangente que nous avons appris la manière de déterminer les diverses circonstances de son cours. Les géomètres ne se sont point bornés à comparer ainsi les courbes à des lignes droites dont elles s'éloignent bientôt, mais ils se sont

proposé de trouver parmi des courbes simples comme la parabole, le cercle, etc. celles qui, dans un petit espace, s'approchent le plus d'une courbe quelconque.

La tangente d'une courbe étant la limite de toutes les droites qui rencontrent cette courbe en deux points, on peut par analogie chercher en général parmi toutes les lignes d'une espèce donnée, la limite de celles qui coupent la courbe proposée en un nombre donné de points.

On sait, par exemple, qu'il faut trois points pour déterminer un cercle; on peut supposer que ces trois points soient pris sur la courbe proposée, et chercher à quel cercle en particulier l'on arrivera si les trois points viennent à coïncider. Ce cercle, que nous nommons le *cercle osculateur*, sera la limite de tous les autres, comme la tangente est celle de toutes les sécantes.

Celle-ci se détermine par les deux constantes qui entrent dans son équation (*Trig.* 64), et le cercle par les trois constantes qui expriment l'abscisse et l'ordonnée de son centre, et la grandeur de son rayon (*Trig.* 73).

Il est visible que lorsque deux courbes quelconques DX, EY, ont trois points communs M, M', M'', etc. FIG. 26. *fig.* 26, elles ont nécessairement trois ordonnées communes, ou, ce qui est la même chose, il y a deux côtés du FIG. 2. polygone $MM'M'$, etc. *fig.* 2, qui sont inscrits en même temps à chacune de ces courbes, et les lignes PM, $M'Q$ et $M''N''$ (62) ont la même valeur dans l'une et l'autre. En désignant donc par x', y', les coordonnées par- FIG. 26. ticulières au point M dans la courbe proposée DX, *fig.* 26, et par y, x, les coordonnées d'un point quelconque de la seconde courbe EY, nous aurons par le n°. 62 pour les points M, M', M'',

$$y = y'$$

$$\left.\begin{array}{l} y=y' \\ \frac{dy}{dx}h+\text{etc.}=\frac{dy'}{dx'}h+\text{etc.} \\ \frac{d^2y}{dx^2}h^2+\text{etc.}=\frac{dy'^2}{dx'^2}h^2+\text{etc.} \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} y=y' \\ \frac{dy}{dx}+\text{etc.}=\frac{dy'}{dx'}+\text{etc.} \\ \frac{d^2y}{dx^2}+\text{etc.}=\frac{d^2y'}{dx'^2}+\text{etc.} \end{array}\right.$$

en supposant qu'on ait changé x en x', dans les expressions de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. tirées de l'équation de la courbe EY. Maintenant si on passe à la limite par la supposition de $h=0$, les trois intersections se réuniront en un seul point de contact, pour lequel on aura les conditions

$$\begin{array}{l} y=y' \\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'} \\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dx'^2}. \end{array}$$

Supposons que la courbe EY soit le cercle représenté par l'équation

$$(x-\alpha)^2(+y-\beta)^2=\gamma^2 \text{ (\textit{Trig.} 73)};$$

en la différentiant deux fois consécutives, nous aurons

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

et il faudra qu'en changeant x en x', dans ces équations, elles donnent pour y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ les mêmes valeurs que celles de la courbe proposée, ou bien qu'elles soient satisfaites lorsqu'on y substituera x', y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$.

En faisant cette dernière substitution, elles deviendront

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=\gamma^2$$

$$(x'-\alpha)+(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'}=0$$

$$1+\frac{dy'^2}{dx'^2}+(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}=0;$$

mais comme les quantités dérivées de la courbe proposée sont déterminées puisqu'elles appartiennent à un point particulier M, il faudra que les quantités α, β et γ reçoivent des valeurs propres à vérifier les équations ci-dessus.

En déterminant par les deux dernières équations les valeurs de $y'-\beta$ et de $x'-\alpha$, pour les substituer dans la première, on trouvera

$$y'-\beta=-\frac{dx'^2+dy'^2}{d^2y'}$$

$$x'-\alpha=\frac{dy'}{dx'}\left(\frac{dx'^2+dy'^2}{d^2y'}\right)$$

$$\gamma=\frac{(dx'^2+dy'^2)^{\frac{3}{2}}}{dx'd^2y'}.$$

95. Le cercle dont nous venons de déterminer la grandeur et la position varie pour chaque point de la courbe, puisque les quantités α, β et γ, qui le caractérisent, sont des fonctions de x' et de y'. Il jouit de propriétés remarquables, qu'on peut découvrir soit par des considérations géométriques, soit par des considérations analytiques. Nous commencerons par exposer les premières.

FIG. 27. Soit $MM'M''M'$, etc. *fig.* 27, le polygone inscrit à la courbe proposée. Le cercle qui passe par les trois points M, M', M'', a son centre placé à l'intersection des droites

NO et $N'O'$, perpendiculaires sur le milieu des droites MM' et $M'M''$. Si l'on combine avec les points M' et M'' un quatrième point M''', on déterminera par ces trois points un nouveau cercle dont le centre sera en O', à l'intersection des droites $N'O'$ et $N''O''$, respectivement perpendiculaires sur le milieu des côtés $M'M''$ et $M''M'''$. En concevant que la même opération soit continuée dans toute l'étendue du polygone $MM'M''M'''$, etc. les centres de tous les cercles, que l'on considérera successivement, formeront un polygone $OO'O''$, tel que tous ses côtés prolongés, rencontreront à angle droit ceux du premier, et seront les différences des rayons consécutifs NO, $N'O'$, $N''O''$, etc. une portion quelconque OO'' de sa circonférence, sera égale à la différence des deux rayons NO et $N''O''$, qui la termineront.

Voyons maintenant comment se modifient ces propriétés lorsqu'on passe aux limites, c'est-à-dire, lorsqu'on substitue les courbes aux polygones. Les points M, M', M'', venant alors à coïncider, la droite NO devient normale à la courbe qui est la limite du polygone $MM'M''M'''$, etc. et tangente à celle qui est la limite du polygone $OO'O''$; et le cercle qui passe par les trois points $MM'M''$ devient le cercle osculateur.

Dans cet état de choses, supposons que DX, *fig.* 28, représente la courbe proposée, FZ celle qui contient les centres des cercles osculateurs de la première, le rayon MO du cercle osculateur du point M étant tangent à la courbe FZ, a nécessairement la même direction que celle que prendroit un fil enveloppé autour de la convexité de cette courbe, lorsqu'en le développant on seroit parvenu au point O; on remarquera encore qu'en poursuivant le développement de O en O', ce fil s'allongeroit d'une quantité égale à l'arc OO' de la courbe FZ, FIG. 28.

et comme par ce qui précède la différence des rayons OM et OM' est aussi égale au même arc OO', il s'ensuit que le bout M du fil doit encore se trouver en M' sur la courbe proposée, qu'il n'a pas dû quitter dans le développement effectué depuis l'un de ces points jusqu'à l'autre.

Ce procédé a une grande analogie avec la description du cercle; c'est la courbe FZ qui fait l'office de centre, et le rayon MO, au lieu d'être constant, varie pour chaque point. La courbe FZ s'appelle la *développée*, la courbe DX, sa *développante*, et le rayon du cercle osculateur, rayon de la *développée*.

En général le cercle osculateur touche et coupe la courbe, comme le fait la tangente à un point d'inflexion (74). Les cercles osculateurs augmentant de rayon de M en M', il est visible que l'arc MM' de la courbe doit se trouver au-dessus de la portion MH du cercle osculateur au point M et au-dessous de la portion $M'G'$ du cercle osculateur en M'. De plus, comme on peut toujours concevoir les points M et M' assez voisins l'un de l'autre pour que la différence des rayons MO et $M'O'$ soit d'une petitesse donnée, on reconnoîtra facilement qu'il ne peut passer aucun autre cercle entre la courbe et son cercle osculateur, puisque tout cercle d'un rayon plus petit que MO passe en-dedans de l'arc GMH, tandis que tout cercle d'un rayon plus grand que $M'O'$, se trouve au dehors de l'arc $G'M'H'$.

De tous les cercles qui touchent la courbe proposée au point M, le cercle osculateur étant donc celui qui s'en approche le plus, soit avant, soit après le contact, est par conséquent celui qui diffère le moins de cette courbe dans le point que nous considérons. La courbure du cercle est uniforme dans tous ses points, mais

pour des arcs de même longueur, celle d'un petit cercle est plus considérable que celle d'un grand, en sorte que les courbures de ces arcs sont en raison inverse des rayons des cercles auxquels ils appartiennent. On peut donc, par le rayon du cercle osculateur, juger de la courbure d'une courbe dans l'un quelconque de ses points. Cette considération a fait donner au rayon du cercle osculateur le nom de rayon de *courbure*; et on voit d'après ce qui précède que *la courbure d'une courbe est en raison inverse de son rayon de courbure.*

Nous terminerons ces remarques en faisant observer que la développée peut aussi être considérée comme la *limite* des intersections des normales de la courbe proposée, prises deux à deux consécutivement, puisque le point K, intersection des deux rayons MO et $M'O'$ qui sont perpendiculaires à la courbe DX en M et en M', s'approche d'autant plus de la courbe FZ que les points M et M' sont plus voisins l'un de l'autre.

96. Pour montrer comment l'analyse conduit aux propriétés précédentes, reprenons les trois équations du n°. 94; en faisant disparoître les différentielles qui entrent comme diviseurs dans les deux derniers termes, nous aurons

$$(x'-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$(x'-\alpha)\,dx'+(y'-\beta)\,dy'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$dx'^2+dy'^2+(y'-\beta)\,d^2y'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

1°. La seconde donnant

$$\beta-y'=-\frac{dx'}{dy'}(\alpha-x')$$

est (67) celle de la normale menée du point dont les coordonnées sont α et β, c'est-à-dire, du point O

de la courbe FZ, au point M de la courbe proposée DX:

2°. En différentiant les deux premières équations par rapport à x', y', α, β et γ, on aura

$$(x'-\alpha)dx'+(y'-\beta)dy'-(x'-\alpha)d\alpha-(y'-\beta)d\beta=\gamma d\gamma$$
$$dx'^2+dy'^2+(y'-\beta)d^2y'-d\alpha dx'-d\beta dy'=0.$$

Les équations (2) et (3) réduisent celles-ci à

$$-(x'-\alpha)d\alpha-(y'-\beta)d\beta=\gamma d\gamma.... \quad (4)$$
$$d\alpha dx'+d\beta dy'=0..... \quad (5)$$

la dernière donne $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{dx'}{dy'}$, expression qui change l'équation

$$\beta-y'=-\frac{dx'}{dy'}(\alpha-x')$$

en $$y'-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x'-\alpha)$$

et qui montre par conséquent (67) que la normale MO, est tangente à la courbe FZ.

3°. Si on élimine $x'-\alpha$, $y'-\beta$, $\frac{dy'}{dx'}$, entre les équations (1), (2), (4) et (5), on aura

$$d\gamma^2=d\alpha^2+d\beta^2 \text{ ou } \frac{d\gamma}{d\alpha}=\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}},$$

ce qui donne le coefficient différentiel de γ, par rapport à la variable α; or (85) cette expression est aussi celle du coefficient différentiel de l'arc de la courbe dont les coordonnées sont α et β; et il résulte de cette identité que le rayon du cercle osculateur varie par les mêmes différences que l'arc de la courbe FZ.

97. On peut prouver aussi, avec le secours de l'analyse qu'entre la courbe proposée et son cercle oscula-

teur, il ne peut passer aucun autre cercle; et cette propriété, que nous avons d'abord déduite de la considération des polygones, conduit immédiatement aux autres.

Lorsque deux courbes, dont les ordonnées et les abscisses sont désignées par x et y, x' et y', ont un point commun, il faut que pour l'abscisse de ce point on ait $y = y'$.

En changeant x en x', les ordonnées correspondantes à l'abscisse $x' + h$, seront respectivement

$$y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$y' + \frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1} + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

prenant la différence, il viendra

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}\right)\frac{h}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx'^2}\right)\frac{h^2}{1.2}$$
$$+ \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3y'}{dx'^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Il est évident que si pour le point particulier que l'on considère, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$, la distance de la première courbe à la seconde, dans le sens de l'ordonnée, pourra, immédiatement auprès de ce point devenir moindre que celle de toute autre courbe pour laquelle on n'auroit pas la même équation, et qui ne sauroit par conséquent passer entre les deux premières.

La proximité deviendroit encore plus grande si l'on avoit aussi $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2}$. Aucune des courbes qui ne satisferoient qu'aux deux conditions

$$y = y', \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{dy'}{dx'},$$

c'est-à-dire, qui n'auroient qu'un simple contact ne pourroit, immédiatement auprès du point commun, approcher autant de la seconde courbe que le feroit la première, et ne sauroit passer entre l'une et l'autre.

On voit encore que l'expression de la différence des ordonnées, ayant au premier terme le facteur h^3, qui change de signe lorsqu'on met $-h$ au lieu de $+h$, il arrive en général, au cercle osculateur ce qu'on a remarqué pour la tangente dans les points d'inflexion (74), excepté pourtant dans les cas particuliers où l'on auroit aussi

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y'}{dx'^3}.$$

Il n'est pas besoin de pousser plus loin ces considérations pour se convaincre que les courbes peuvent avoir entr'elles des contacts plus ou moins immédiats. En suivant la marche tracée dans le n°. 94, on trouveroit que si deux courbes avoient quatre points communs, et que que l'on déterminât l'une de ces courbes de manière à faire coïncider les quatre points, on auroit en même temps

$$y=y', \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dx'^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y'}{dx'^3};$$

ce contact différeroit des précédens en ce qu'aucune des courbes qui n'en auroient que de l'espèce de ces derniers, avec l'une des courbes proposées, ne pourroit passer entre celle-ci et l'autre.

En employant les conditions ci-dessus, à la détermination des constantes qui particularisent l'équation dont les variables sont x et y, on voit qu'il faudroit que cette équation contînt quatre constantes.

98. Les contacts se divisent en ordres d'après le nombre de points d'intersection qui s'y trouvent réunis, ou ce qui revient au même, d'après le nombre de termes dont ils supposent l'égalité dans les développemens des ordonnées relatives au point suivant. Le plus élevé de ceux que puisse avoir en général la courbe *touchante*, avec la courbe proposée, contact dont l'ordre est marqué par le nombre des constantes que renferme l'équation de la première, se nomme *osculation*.

Ainsi la tangente, qui ne peut avoir en général qu'un simple contact du premier ordre, avec une courbe donnée, est une *osculatrice* du premier ordre. Le cercle dont l'équation renferme trois constantes, peut avoir, ou un simple contact du premier ordre, ou un contact du second ; mais ce dernier, étant le plus élevé, prend le nom d'osculation, et distingue le cercle osculateur de tous les cercles tangens.

99. Je ne m'étendrai pas beaucoup sur l'application des formules du n°. 94, parce que cette application n'a aucune difficulté lorsqu'on possède bien le mécanisme du Calcul différentiel. N'ayant plus à considérer que les coordonnées de la courbe proposée, j'omettrai les accens, et je prendrai en conséquence

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y},$$

$$x - \alpha = \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{dx\,d^2y},$$

$$y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}.$$

L'équation générale des lignes du second ordre

$$y^2 = mx + nx^2$$

conduisant à

$$dy = \frac{(m+2nx)dx}{2y},$$

$$d^2y = \frac{2ydx^2-(m+2nx)dxdy}{2y^2} = \frac{[4ny^2-(m+2nx)^2]dx^2}{4y^3},$$

il en résultera

$$\gamma = \frac{[4y^2+(m+2nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{8ny^2-2(m+2nx)^2}.$$

Si l'on substitue la valeur de y dans cette expression, on aura

$$\gamma = -\frac{(m^2+4m(1+n)x+4n(1+n)x^2)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

Telle est l'expression générale du rayon de courbure dans les lignes du second ordre; on la particularisera en donnant à m et à n les valeurs qui conviennent à chaque espèce de ces lignes (*Trig.* 147).

Si l'on fait $n = 0$, la courbe proposée deviendra la parabole, et l'on aura

$$\gamma = -\frac{(m^2+4mx)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

Ce résultat, qui exprime la valeur du rayon de courbure, se réduit à $\frac{1}{2}m$, lorsque $x = 0$; ce qui nous apprend que la courbure de la parabole à son sommet, est la même que celle du cercle décrit d'un rayon égal au demi-paramètre. Le rayon du cercle osculateur devenant plus grand à mesure que x augmente, la courbure de la parabole diminue en même temps et tend sans cesse à s'anéantir. En rapprochant la valeur

de y de celle qu'on a trouvée dans le n°. 66 pour la normale, on verra que $y=\frac{\overline{MR}^3}{\frac{1}{4}m^2}$, ou que *le rayon de courbure dans la parabole est égal au cube de la normale divisé par le quarré du demi-paramètre.*

On obtiendroit de même les expressions de $x-\alpha$ et de $y-\beta$; et mettant pour y sa valeur, on auroit deux équations en x, α et β, desquelles, éliminant x, on déduiroit l'équation en α et β, appartenante à la développée. Je n'effectuerai ce calcul que pour la parabole. On a dans ce cas

$$dy=\frac{m\,dx}{2y}, \quad d^2y=-\frac{m^2dx^2}{4y^3},$$

et il vient

$$y-\beta=\frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2+m^2}{4y^2}\right)=\frac{4y^3}{m^2}+y$$

$$x-\alpha=-\frac{m}{2y}\,\frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2+m^2}{4y^2}\right)=-\frac{4y^2+m^2}{2m};$$

on conclut de là

$$-\beta=\frac{4y^3}{m^2}, \qquad x-\alpha=-\frac{2y^2}{m}-\frac{1}{2}m;$$

mettant dans chacune de ces équations, pour y sa valeur $m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, il viendra

$$-\beta=\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}, \qquad x-\alpha=-2x-\frac{1}{2}m;$$

prenant ensuite la valeur de x dans le second résultat, pour la substituer dans le premier, on obtiendra

$$x=\frac{1}{3}(\alpha-\frac{1}{2}m), \qquad \beta^2=\frac{16}{27m}(\alpha-\frac{1}{2}m)^3:$$

la dernière de ces équations appartient à la développée de la parabole. Si on y change $\alpha - \frac{1}{3}m$ en α, ou qu'on porte l'origine des abscisses en D, *fig.* 29, on pourra lui donner cette forme très-simple, $\beta^2 = \frac{16\alpha^3}{27m}$, qui nous montre que la courbe DF est une des paraboles du troisième ordre (*), composée de deux branches DF et Df, dont la première engendre par son développement la branche AX de la parabole ordinaire XAx, et la seconde produit la branche Ax.

FIG. 29.

100. Il faut observer que pour la description de la parabole XAx, par le développement de la courbe FDf, le fil enveloppé autour de l'une ou de l'autre des branches DF et Df, doit avoir au point D, dans le prolongement de la tangente BD, une longueur AD égale au rayon de courbure au point A, c'est-à-dire, à la moitié du paramètre de la proposée; tout autre point, tel que I, pris sur ce fil, produiroit une courbe différente. Si le point I tomboit sur le point D, le rayon de courbure de la courbe décrite alors, seroit nul à son origine, et par conséquent elle auroit à ce point une courbure infinie (95).

On voit aussi que puisque la longueur de l'arc DF est égale à la différence qui se trouve entre le rayon de courbure correspondant MF, et le rayon de courbure ADF qui appartient à l'origine, la courbe FDf

(*) L'équation $y^2 = mx$ étant généralisée ainsi : $y^p = mx^q$, représente une famille de courbes, dont la parabole ordinaire n'est qu'un cas particulier; on les nomme aussi *paraboles*, mais on les distingue par l'exposant de leur degré.

est *rectifiable*, c'est-à-dire, qu'on peut assigner une ligne droite qui lui soit égale en longueur.

Cette remarque est générale, car puisqu'on peut toujours parvenir à l'expression du rayon de courbure des courbes algébriques, les développées de ces courbes sont toutes rectifiables.

Des courbes transcendantes.

101. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des courbes algébriques, nous allons maintenant faire connoître quelques-unes des courbes transcendantes les plus remarquables: on nomme ainsi celles dont l'équation ne peut s'obtenir en termes algébriques. Nous nous occuperons d'abord de la *Logarithmique* ou de la courbe dans laquelle les ordonnées sont les logarithmes des abscisses.

On a dans cette courbe $y=lx$, et quand on fait $x=1$, il vient $y=0$, ce qui fait voir qu'elle rencontre l'axe AB au point E, *fig.* 30, où l'abscisse AE est égale à l'unité. La branche EX, qui répond aux abscisses positives plus grandes que l'unité, est infinie, puisque les logarithmes de ces abscisses croissent toujours. Dans la partie AE, où les abscisses sont des fractions, les ordonnées sont négatives et augmentent à mesure que ces fractions diminuent, en sorte que la branche Ex a pour asymptote la partie négative Ac de l'axe des ordonnées: enfin la logarithmique ne s'étend point du côté des abscisses négatives, parce que leurs logarithmes sont imaginaires (voyez le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*). FIG. 30.

En différentiant l'équation $y=lx$, il vient $\frac{dy}{dx}=\frac{M}{x}$ (27); on voit par là que la tangente de cette courbe est perpendiculaire à la ligne des abscisses

lorsque $x=0$, et qu'elle ne lui est parallèle qu'en supposant x infini (74). L'expression générale de la soutangente (64) donne $PT=\frac{xy}{M}$; mais en chassant y on introduit le logarithme de x, ainsi cette expression est transcendante; cependant en prenant la soutangente OD sur l'axe AC, on aura $OD=x\frac{dy}{dx}=M$, résultat bien remarquable, puisqu'il nous apprend que la soutangente OD est constante et égale au module, pour tous les points de la courbe. On trouveroit de même que la tangente, la sounormale et la normale, prises par rapport à l'axe AB, sont transcendantes à cause que l'ordonnée y entre dans leur expression, mais qu'elles deviennent algébriques, lorsqu'on les considère à l'égard de l'axe AC.

Je passe à la recherche du rayon de courbure. On a

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{x^2+M^2}{x^2}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{x^2},$$

d'où (94) $\gamma=\frac{(x^2+M^2)^{\frac{1}{2}}}{Mx}$,

$$y-\beta=\frac{(x^2+M^2)}{M}. \qquad x-\alpha=-\frac{(x^2+M^2)}{x}.$$

Je ne m'arrêterai point à considérer la développée, qui seroit nécessairement transcendante; j'observerai seulement qu'on pourroit obtenir l'équation différentielle de cette courbe, en éliminant par le moyen des valeurs de $y-\beta$, de $x-\alpha$ et de leurs différentielles, x, dx et dy de l'équation $dy=M\frac{dx}{x}$.

Les logarithmiques diffèrent entr'elles à raison du module relatif au système de logarithmes qu'elles représen-

tent. L'équation $x = A^y$ donne, en prenant les logarithmes népériens, $l'x = y\,l'A$, d'où

$$y = \frac{l'x}{l'A},$$

résultat dont le second membre n'est autre chose que le logarithme de x calculé pour un module égal à $\frac{1}{A}$: cette équation appartient donc à une logarithmique.

102. La *cycloïde* ou la courbe décrite par un point pris sur la circonférence d'un cercle, pendant que ce cercle roule sur une ligne droite donnée de position, est encore une courbe transcendante; la relation entre ses ordonnées et ses abscisses, dépend des arcs du cercle générateur: voici comment on peut l'exprimer.

L'origine du mouvement du cercle étant arbitraire, je la prends au point A, *fig.* 31, où le point *décrivant* M, se trouvoit sur la droite AB parcourue par le cercle générateur QMG. Puisque ce cercle, en roulant, applique successivement tous les points de sa circonférence sur la droite AB, il est évident que lorsqu'il est parvenu dans une situation quelconque QMG, la distance AQ est égale à l'arc MQ, compris entre le point qui touche la droite AB en A, et le point Q qui la touche dans la position actuelle. FIG. 31.

Elevons sur AB, par le point Q, la perpendiculaire QO, qui passera par le centre du cercle générateur, et menons MN parallèle à AB: MN sera le sinus de l'arc MQ, et NQ en sera le sinus verse.

Faisons

$$QO = a, \qquad AP = x, \qquad PM = QN = y,$$

et nous aurons

$$MN=\sqrt{2ay-y^2},\quad x=AQ-PQ=\text{arc}MQ-MN$$

$$\text{ou } x=\text{arc}\,MQ-\sqrt{2ay-y^2}.$$

L'arc MQ ayant MN pour sinus est donné par la variable y. On le fera disparoître par la différentiation, en se servant de la formule du n°. 85, dans laquelle a représente aussi le rayon et où le sinus est désigné par x. En substituant $\sqrt{2ay-y^2}$, au lieu de x dans cette formule, on en tirera

$$\text{d.arc}\,MQ=\frac{a\,\text{d}y}{\sqrt{2ay-y^2}};$$

et on aura ensuite

$$\text{d}x=\frac{a\,\text{d}y}{\sqrt{2ay-y^2}}-\frac{a\,\text{d}y-y\,\text{d}y}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

ou

$$\text{d}x=\frac{y\,\text{d}y}{\sqrt{2ay-y^2}}:$$

telle est l'équation différentielle de la cycloïde (*).

(*) Si on vouloit calculer la longueur de l'arc MQ, d'après son sinus par le moyen des tables trigonométriques, afin de construire la courbe, il faudroit d'abord rapporter au rayon 1 le sinus MN, relatif au rayon a, et l'on auroit $\frac{MN}{a}$, ou $\frac{1}{a}\sqrt{2ay-y^2}$. Désignant par t la longueur de l'arc relatif à ce dernier sinus, celle de l'arc MQ aura nécessairement, avec le *quadrans* du cercle dont il fait partie, le même rapport que l'arc t, avec le *quadrans* des tables; il en résultera

$$\text{arc}\,MQ=at$$

$$x=at-\sqrt{2ay-y^2}$$

et $t=\text{arc}$, dont le sinus $=\frac{1}{a}\sqrt{2ay-y^2}$,

Rien

Rien n'est plus facile maintenant que d'obtenir les expressions de la soutangente et de la tangente, de la sounormale et de la normale, dans la cycloïde. On trouve, par les formules générales des numéros 64 et 65,

$$PT=\frac{y^2}{\sqrt{2ay-y^2}}, \qquad MT=\frac{y\sqrt{2ay}}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

$$PR=\sqrt{2ay-y^2}, \qquad MR=\sqrt{2ay}.$$

On peut construire ces valeurs d'une manière très-simple; car il est aisé de remarquer que MP ou y étant considéré comme l'abscisse QN dans le cercle générateur QMG, la valeur donnée ci-dessus pour PR est précisément celle de l'ordonnée MN de ce cercle, et que, par conséquent, la normale se confond avec la corde de l'arc MQ, comme on peut le voir aussi par l'expression de MR : il suit de là que la tangente MT est le prolongement de la corde MG. Si on imagine que le cercle QMG, glisse sur le point Q pour atteindre une position quelconque qmg, les lignes mq et mg, resteront, malgré ce changement, parallèles aux lignes MQ et MG; il suffira donc, pour construire la tangente et la normale dans un point donné M, de rapporter ce point sur le cercle fixe qmg, ce qui se fera en tirant la droite Mm parallèle à AB, et de mener ensuite MT parallèlement à mg et MQ parallèlement à mq.

---

la première équation, en mettant pour t sa valeur, s'écrit ainsi

$$x=\text{arc}\left(\sin=\frac{1}{a}\sqrt{2ay-y^2}\right);$$

et en différentiant d'après la règle du n° 52, on retombe sur le résultat que nous avons donné ci-dessus.

103. Je passe à la recherche du rayon de courbure. En différentiant l'équation

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

j'obtiens, puisque dx est constant,

$$o = (y\,d^2y + dy^2)\sqrt{2ay - y^2} - \frac{ydy(ady - ydy)}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

réduisant et divisant par y, il vient

$$o = (2ay - y^2)\,d^2y + a\,dy^2,$$

d'où je tire

$$d^2y = -\frac{a\,dy^2}{2ay - y^2};$$

substituant cette valeur et celle de dy dans l'expression du rayon de courbure (94), je trouve, après les réductions nécessaires,

$$\gamma = 2^{\frac{1}{2}}(ay)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ay}.$$

Ce résultat nous fait voir que le rayon de courbure MM' est double de la normale MQ, et qu'il ne peut par conséquent devenir plus grand que le double du diamètre du cercle générateur, diamètre qui est à-la-fois l'ordonnée et la normale de la cicloïde au point I, où le contact Q a parcouru la moitié de la circonférence.

Les expressions de $x - \alpha$ et de $y - \beta$ donnent ensuite

$$y - \beta = 2y, \qquad x - \alpha = -2\sqrt{2ay - y^2};$$

on conclut de là

$$\beta = -y, \qquad \alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2}$$

ou $\qquad EM' = PM, \qquad AE = AP + 2MN;$

il en résulte que la développée de la cycloïde est une autre cycloïde égale à la première, mais posée en sens

inverse. En effet, si on mène $A'B'$ parallèle à AB, à une distance $A'I$ égale au diamètre du cercle générateur, et qu'on prenne le point A' pour l'origine des coordonnées, on aura

$$\begin{aligned} A'P' &= EI = AI - AE = AI - AP - 2MN \\ &= GMQ - \text{arc } MQ - MN = \text{arc } MG - MN \quad (102) \\ P'M' &= EP' - EM' = GQ - PM = GN. \end{aligned}$$

Maintenant si l'on fait

$$A'P' = X, \qquad P'M' = Y,$$

on obtiendra

$$MN = \sqrt{2aY - Y^2}, \quad X = \text{arc } MG - \sqrt{2aY - Y^2};$$

il est visible, par la dernière équation, que X et Y ne sont autre chose que les coordonnées d'une cycloïde décrite par le même cercle générateur que la première.

La même conséquence peut se tirer immédiatement des considérations géométriques, lorsqu'on est parvenu à connoître le rayon de courbure. En prolongeant la droite GQ jusqu'à ce qu'elle rencontre $A'B'$ en Q', et menant $Q'M'$, on formera les triangles GMQ et $QM'Q'$ égaux entr'eux ; l'angle $QM'Q'$ sera donc droit, et si on décrit sur QQ' comme diamètre, un cercle, il passera par le point M' et sera égal au cercle générateur. Cela posé, puisque l'arc $M'Q'$ est le supplément de $M'Q$, qui lui-même est égal à MQ, on aura

$$\begin{aligned} \text{arc } M'Q' &= QMG - \text{arc } MQ \\ &= AI - AQ = QI = A'Q', \end{aligned}$$

ce qui montre bien clairement que la développée $A'M'A_1$ est une cycloïde décrite par le cercle $QM'Q'$, roulant sur $A'B'$ de A' vers B'.

Si donc on fait

$$ON = t, \qquad AM = u,$$

et que, prenant pour unité le rayon AN, on représente par 2π la circonférence OGO, on aura $u = \frac{t}{2\pi}$.

Les variables de cette équation sont ce que les géomètres appellent des *coordonnées polaires*. Le centre A du cercle OGO, se nomme le *pôle*; la ligne AM, assujettie à passer toujours par ce point, est le *rayon vecteur*, et tient lieu de l'ordonnée de la courbe, tandis que l'arc ON remplace l'abscisse.

La spirale que nous venons de considérer, et qui porte le nom de *spirale d'Archimède* n'est qu'un cas particulier des courbes que représente l'équation $u = At^n$, en donnant à n toutes les valeurs possibles. Lorsqu'on fait $n = -1$, on a $u = At^{-1}$ ou $ut = A$, équation qui appartient à la *spirale hyperbolique*. Si au lieu de la distance AM, on prenoit pour u la partie MN du rayon vecteur, comprise entre le point M et la circonférence du cercle OGO, l'équation $u^2 = At$ seroit celle de la spirale parabolique, ou de la courbe qu'on formeroit en roulant l'axe d'une parabole autour du cercle OG; les ordonnées se trouveroient alors perpendiculaires à la circonférence de ce cercle, et tomberoient sur ses rayons.

Tant que n est un nombre positif, les spirales données par l'équation $u = At^n$, prennent leur origine au point A; mais quand n est négatif, u, d'abord infini, lorsque $t = 0$, diminue à mesure que cet arc augmente; et à chaque nouvelle révolution le point décrivant s'approche du point A sans pouvoir jamais y atteindre.

105. Lorsqu'on rapporte les courbes à des coordonnées polaires, la différentielle première du rayon vecteur AM, *fig.* 33, est la partie QM' retranchée du rayon vecteur suivant, par l'arc de cercle MQ décrit du point A comme centre, avec le rayon MA. On regarde ce petit arc comme une ligne droite (83), et le triangle MQM' comme rectiligne, ce qui donne $MM'=\sqrt{\overline{QM}^2+\overline{QM'}^2}$. Lorsqu'on mesure l'angle $MA'M$ par un arc de cercle NN' décrit d'un rayon AN égal à l'unité, on a $QM=u\,dt$, et QM' étant du, il vient $MM'=\sqrt{du^2+u^2dt^2}$. FIG. 33.

106. Si on mène AT parallèle à la corde du petit arc QM, et qu'on prolonge jusqu'à la rencontre de cette droite le côté MM' du polygone inscrit à la courbe, on aura par la similitude des triangles $M'QM$ et MAT,

$$\frac{QM'}{QM}=\frac{AM}{AT}.$$

Lorsqu'on passe aux limites, la corde QM peut être prise pour l'arc, l'angle QMA doit être regardé comme droit, la ligne MT comme tangente à la courbe, AT comme perpendiculaire à AM, et l'on a

$$\frac{du}{u\,dt}=\frac{u}{AT},$$

d'où l'on conclura

$$AT=\frac{u^2dt}{du}.$$

107. La différentielle seconde d^2u, étant la différence entre deux différentielles premières consécutives, sera représentée par $M''Q'-M'Q$, et il faudra observer que

lorsqu'on suppose l'arc NN' constant, ou qu'on fait toujours varier l'angle t de la même quantité, les arcs QM, $Q'M'$, ne sont pas pour cela égaux entr'eux, car ils sont tous de rayons différens.

Nous pourrions déduire de là les expressions des tangentes, des normales, etc. mais nous préférerons d'appliquer aux courbes qui sont rapportées à des coordonnées polaires, les expressions des soutangentes, des tangentes, etc. que nous avons trouvées relativement à des coordonnées rectangles, parce que cela nous fournira l'occasion de transformer les coordonnées du premier système dans celles du second, et de montrer comment on peut passer de l'un à l'autre. Cela sera d'autant plus utile, qu'on rapporte quelquefois les courbes algébriques à des coordonnées polaires; on le fait sur-tout à l'égard des courbes du second degré, en prenant leur foyer pour pôle.

FIG. 32. 108. Plaçons au point A, *fig.* 32, pour plus de simplicité, l'origine des coordonnées rectangles; soit $QO=m$, l'arc intercepté entre le point Q, situé sur l'axe des abscisses AB et le point O, origine de l'arc t. En menant PM perpendiculaire sur AB, et en observant que l'angle MAP est mesuré par l'arc NQ égal à $t-m$, nous aurons

$$\overline{AM}^2=\overline{AP}^2+\overline{PM}^2,$$
$$AP=AM\cos NQ,$$
$$PM=AM\sin NQ,$$

ou

$$u=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$x=u\cos(t-m),$$
$$y=u\sin(t-m).$$

Au moyen des deux dernières valeurs, on changera toute équation algébrique entre x et y, dans une autre

qui ne contiendra plus que le sinus, le cosinus de l'arc t et le rayon vecteur u. Ces valeurs donnent aussi

$$\cos(t-m)=\frac{x}{u}, \qquad \sin(t-m)=\frac{y}{u};$$

d'où on tirera des valeurs de $\cos t$ et de $\sin t$ en x, y, u, $\sin m$ et $\cos m$, qui, substituées dans une équation quelconque entre u, $\sin t$ et $\cos t$, conduiront à un résultat ne renfermant plus que x et y, puisqu'on pourra remplacer u par $\sqrt{x^2+y^2}$.

Si, pour abréger, on suppose que la ligne AB se confonde avec la ligne AO, on aura seulement

$$\cos t=\frac{x}{u}, \qquad \sin t=\frac{y}{u}.$$

Lorsque l'équation en u et t, qu'on se propose de transformer, contient l'arc t lui-même, il n'est plus possible d'obtenir une relation algébrique entre x et y, puisqu'on n'en a point de semblable entre l'arc t, son sinus et son cosinus; mais on parvient ainsi qu'on va le voir, à une équation différentielle, qui ne contient plus que x, y, dx et dy.

On tire des valeurs trouvées ci-dessus, pour u, x et y,

$$\begin{aligned} du&=d.\sqrt{x^2+y^2},\\ dx&=du\cos(t-m)-u\,dt\sin(t-m),\\ dy&=du\sin(t-m)+u\,dt\cos(t-m); \end{aligned}$$

si on élimine du des deux dernières équations, il viendra

$$dt=\frac{dy\cos(t-m)-dx\sin(t-m)}{u};$$

mettant pour $\cos(t-m)$, $\sin(t-m)$ et u, leurs valeurs, on aura

$$dt=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

On pourra donc chasser de l'équation en u et t, et de sa différentielle les quantités u, $\cos t$, $\sin t$, $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}t$; les deux résultats qu'on obtiendra ne contenant plus que t, on le fera disparoître par l'élimination.

Prenons pour exemple l'équation $u = At^n$, qui donne

$$u^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{1}{n}} t, \qquad \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \mathrm{d}u = A^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}t;$$

les expressions de u, de $\mathrm{d}u$ et de $\mathrm{d}t$, étant indépendantes de l'angle m, il viendra, en les substituant et en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{1}{n}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y) = A^{\frac{1}{n}}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x).$$

Avec cette équation on détermineroit les soutangentes les tangentes, etc. des spirales, en faisant usage des formules du n°. 64; mais il sera plus simple et en même temps plus général de transformer ces formules relativement aux variables u et t, et c'est ce que nous allons faire.

109. L'expression de la soutangente devient, en mettant pour y et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ leurs valeurs,

$$PT = u\sin(t-m)\,\frac{\mathrm{d}u\cos(t-m) - u\,\mathrm{d}t\sin(t-m)}{\mathrm{d}u\sin(t-m) + u\,\mathrm{d}t\cos(t-m)}.$$

On simplifiera beaucoup ce résultat, en observant que la situation de la ligne des abscisses, sur laquelle tombe la distance PT, est arbitraire, et qu'on peut par conséquent prendre toujours m tel que l'arc QN, soit 1^q, auquel cas l'ordonnée PM se confond avec le rayon vecteur AM, $\cos(t-m) = 0$, $\sin(t-m) = 1$, et PT se change en $AT' = -\frac{u^2 \mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$.

On construira la tangente en menant par le point A une perpendiculaire au rayon vecteur AM, et en portant sur cette droite la valeur de AT', donnée par la formule ci-dessus.

Si on applique cette formule à l'équation $u = At^n$, on trouvera

$$AT' = -\frac{u^2}{nAt^{n-1}} = -\frac{A}{n}t^{n+1}.$$

Dans la spirale de Conon, on a $n = 1$ et $A = \frac{1}{2\pi}$; il en résulte $AT' = -\frac{t^2}{2\pi}$. On voit par cette expression que lorsque $t = 2\pi$, ou qu'après une révolution du rayon décrivant, la soutangente est égale à la circonférence rectifiée; on trouvera une soutangente quadruple au bout de deux révolutions et ainsi de suite, comme l'a remarqué Archimède.

Lorsque $n = -1$, ce qui est le cas de la spirale hyperbolique, on a $AT' = A$, c'est-à-dire, que la soutangente de cette courbe est constante.

Je ne m'arrête point à la recherche de la sounormale et de la normale, parce qu'on les obtient facilement lorsque la soutangente est connue.

J'observerai seulement que $\frac{AT'}{AM} = \frac{u\,dt}{du}$, exprime la tangente de l'angle que fait avec le rayon vecteur AM la droite $T'M$, qui touche la courbe au point M, et qu'on a

$$T'M = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AT'}^2} = u\sqrt{1 + \frac{u^2 dt^2}{du^2}}.$$

110. Si dans la différentielle de l'arc AM, qui est

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ (85),$$

on substitue pour dx et dy leurs valeurs en coordonnées polaires, on aura

$$ds = \sqrt{du^2 + u^2 dt^2},$$

ainsi qu'on le concluroit immédiatement en regardant le triangle curviligne $MM'Q$, *fig.* 33, comme rectiligne et rectangle : forme dont il diffère d'autant moins que les points M et M' sont plus rapprochés.

FIG. 33.

111. La différentielle de l'aire ADM, prise relativement aux coordonnées polaires, n'est pas un trapèze, comme dans le cas des ordonnées parallèles, mais un secteur AMM'. En passant aux limites, le rapport de ce secteur avec la différentielle NN' sera le même que la limite des rapports que les secteurs AMQ, $AM'R$, entre lesquels il se trouve compris et qui tendent vers l'égalité, ont avec la même différentielle NN'. On conclura de là que l'aire ADM étant représentée par s, on doit avoir

$$\frac{ds}{dt} = \frac{AM \times MQ}{2NN'} = \frac{u^2}{2}, \text{ ou } ds = \frac{u^2 dt}{2}.$$

On rencontre souvent l'expression du secteur ds, en coordonnées rectangles, et il est par conséquent utile de la remarquer. Elle se déduit de celle que nous venons de trouver, en mettant pour dt et pour u^2 leurs valeurs trouvées dans le n°. 108 ; il vient alors

$$ds = \frac{x\,dy - y\,dx}{2}.$$

112. Passons à la recherche du rayon de courbure. Ici on doit observer que la formule

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} \quad (94)$$

suppose que l'accroissement dx demeure constant dans toutes les différentiations que subit la fonction y, et que comme les coordonnées polaires t et u sont des fonctions de x et de y, elles sont implicitement des fonctions de x, et varient par conséquent ainsi que leurs différentielles, lorsque cette dernière quantité reçoit des changemens. Il faudra donc différentier les deux équations

$$dx = du\cos(t-m) - udt\sin(t-m)$$
$$dy = du\sin(t-m) + udt\cos(t-m),$$

en y faisant varier à la fois dy, du, dt, et elles donneront

$$o = d^2u\cos(t-m) - 2dudt\sin(t-m) - ud^2t\sin(t-m) - udt^2\cos(t-m)$$
$$d^2y = d^2u\sin(t-m) + 2dudt\cos(t-m) + ud^2t\cos(t-m) - udt^2\sin(t-m).$$

La position de la ligne AB, *fig.* 32, étant arbitraire, on peut, pour simplifier ces expressions, supposer qu'elle coïncide avec AM et faire en conséquence $t-m=o$; il en résultera FIG. 32.

$$\sin(t-m)=o, \qquad \cos(t-m)=1$$
$$dx=du, \qquad dy=udt$$
$$o=d^2u-udt^2, \qquad d^2y=2dudt+ud^2t$$
$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = \frac{(du^2+u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{2du^2dt+ududt^2} = MF(*).$$

Lorsqu'on appliquera la dernière formule, il sera né-

(*) On parviendroit à cette formule sans supposer $t-m=o$, pourvu qu'on substituât pour d^2u sa valeur tirée de l'équation qui précède l'expression de d^2y, et qu'on fît ensuite les réductions qui résultent des propriétés des sinus et cosinus.

cessaire de faire varier en même temps les deux différentielles du et dt des coordonnées polaires u et t, en assujettissant les différentielles d^2u et d^2t à l'équation

$$o = d^2u - u\,dt^2,$$

qui établit une relation entre d^2u et dt^2, c'est-à-dire, qu'il faudra, dans l'expression de d^2t, substituer, au lieu de d^2u sa valeur $u\,dt^2$, tirée de l'équation ci-dessus.

113. On pourroit calculer de même les expressions des coordonnées α et β de la développée, (94); mais lorsqu'on fait usage des coordonnées polaires, on a coutume de déterminer la position du centre du cercle osculateur et celle de la normale par la distance ME comprise entre le point M et le pied de la perpendiculaire EF, abaissée du centre du cercle osculateur sur la droite AM, ce qui donne quelquefois de l'élégance à la construction du rayon de courbure.

On voit aisément que les triangles MAT' et MEF sont semblables et donnent $ME = AT'\dfrac{MF}{MT'}$; mettant pour MT' et pour AT' leurs valeurs, on aura

$$ME = -\frac{u\,dt\,(du^2 + u^2dt^2)}{2\,du^2dt + u\,du\,d^2t}.$$

114. Pour faire une application des formules précédentes, je prends la spirale logarithmique dont l'équation est $t = lu$. En différentiant il vient (27)

$$dt = M\frac{du}{u}, \text{ ou } \frac{u\,dt}{du} = M,$$

ce qui montre (109) que dans tous les points de cette courbe, la tangente fait le même angle avec le rayon vecteur.

Une seconde différentiation effectuée sur l'équation

$$u\,dt - M\,du = o,$$

et dans laquelle dt et du varieront en même temps, donnera

$$u\,d^2t+du\,dt-M\,d^2u=0\;;$$

mettant pour d^2u sa valeur $u\,dt^2$ (112), il viendra

$$u\,d^2t+du\,dt-M\,u\,dt^2=0,$$

d'où

$$u\,du\,d^2t=M\,u\,du\,dt^2-du^2\,dt$$
$$2\,du^2\,dt+u\,du\,d^2t=M\,u\,du\,dt^2+du^2\,dt,$$

$$MF=\frac{(du^2+u^2\,dt^2)^{\frac{3}{2}}}{M\,u\,du\,dt^2+du^2\,dt}$$
$$ME=-\frac{u(du^2+u^2\,dt^2)}{M\,u\,du\,dt+du^2};$$

substituant pour dt sa valeur en du, on aura

$$MF=\frac{u\sqrt{1+M^2}}{M},\quad ME=u=AM.$$

Il suit de là que la droite AF, *fig.* 34, menée perpendiculairement au rayon vecteur AM, rencontrera la normale MF au centre du cercle osculateur, ou sur le point correspondant de la développée FZ. FIG. 34.

Cette développée sera une spirale semblable à la proposée; car l'angle AFM étant égal à TMA, sera le même pour tous les points de la courbe FZ, comme pour ceux de la courbe AX.

Du changement de la variable indépendante, ou comment on change la différentielle qu'on a prise pour constante, en une autre qui ne le soit plus.

115. Dans la recherche du rayon de courbure, pour les coordonnées polaires, nous avons regardé les variables u et t comme étant implicitement des fonctions de x, et nous avons fait en conséquence varier en même temps

les deux accroissemens du et dt; cependant puisqu'on peut considérer l'équation de la courbe proposée entre les coordonnées polaires u et t, indépendamment des coordonnées rectangles x et y, on peut aussi regarder u comme fonction de t, et supposer constans les accroissemens de cette dernière variable qui est alors indépendante de toute autre. Sous ce point de vue il faut faire $d^2t=0$, mais on doit préalablement changer les formules des n°s 112 et 113, dans lesquelles on a toujours supposé que x étoit la variable indépendante et que dx étoit constant.

J'observe d'abord qu'en prenant t et u pour fonctions de la variable x, on a

$$dt=p\,dx, \qquad du=q\,dx,$$

et par conséquent

$$\frac{du}{dt}=\frac{q}{p}.$$

Différentiant dans la même hypothèse chaque membre de cette équation, il vient

$$d\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{p\,dq-q\,dp}{q^2}=\frac{\frac{dt}{dx}\frac{d^2u}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{d^2t}{dx}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2},$$

ce qui revient à

$$d\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{dt\,d^2u-du\,d^2t}{dt^2},$$

ainsi qu'il résulteroit de la différentiation immédiate de la fraction $\frac{du}{dt}$ (12). Dans cette hypothèse, le coefficient différentiel de la fonction $\frac{du}{dt}$, ou la limite du rapport de $d.\frac{du}{dt}$ à dt, n'est plus exprimé par $\frac{d^2u}{dt^2}$, comme

comme lorsqu'on prend t pour variable indépendante, mais par

$$\frac{1}{dt}d\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{dt\,d^2u-du\,d^2t}{dt^3}.$$

Si donc on fait

$$\frac{du}{dt}=m, \qquad \frac{dm}{dt}=n,$$

on aura

$$n=\frac{dt\,d^2u-du\,d^2t}{dt^3};$$

mais dans le n°. cité $d^2u=u\,dt^2$; donc

$$n=\frac{u\,dt^3-du\,d^2t}{dt^3}.$$

Maintenant il suit de la nature même du Calcul différentiel que toutes les expressions que fournit ce Calcul doivent être indépendantes des valeurs des accroissemens et doivent par conséquent se transformer en d'autres qui ne contiennent plus que les fonctions déterminées m, n, etc. En effet, on a par ce qui précède

$$du=m\,dt,$$

$$d^2t=\frac{u\,dt^3-n\,dt^3}{du}=\frac{(u-n)\,dt^2}{m};$$

substituant dans l'expression de MF et de ME, on obtiendra

$$MF=\frac{(m^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}{2m^2-nu+u^2}$$

$$ME=-\frac{u(m^2+u^2)}{2m^2-nu+u^2},$$

formules délivrées des accroissemens, et ne contenant plus que les fonctions m et n qui sont des limites de leurs rapports. On pourra donc ramener ces formules à telle hypothèse qu'on voudra.

Si l'on suppose, par exemple, que t soit la variable indépendante, on aura alors

$$m=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \qquad n=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2},$$

$$MF=\frac{(\mathrm{d}u^2+u^2\mathrm{d}t^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}t-u\,\mathrm{d}t\mathrm{d}^2u+u^2\mathrm{d}t^3}$$

$$ME=-\frac{u(\mathrm{d}u^2+u^2\mathrm{d}t^2)}{2\,\mathrm{d}u^2-u\mathrm{d}^2u+u^2\mathrm{d}t^2}.$$

On pourra faire le même usage de ces formules que de celles des n°s 112 et 113, pourvu qu'en différentiant l'équation proposée en u et t, on suppose $\mathrm{d}t$ constant.

116. En général, lorsqu'une expression différentielle est prise en regardant y comme une fonction de x, on peut la transformer de manière à supposer que y et x soient toutes deux des fonctions d'une troisième variable quelconque z et prendre ensuite pour variable indépendante celle des trois qu'on voudra.

Le coefficient $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ revient alors

$$p=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}};$$

on doit donc regarder aussi $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}x$ comme des fonctions de z, et les différentier en conséquence, ce qui donnera

$$\mathrm{d}p=\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2};$$

faisant ensuite $\mathrm{d}p=q\mathrm{d}x$, on trouvera

$$q=\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3}.$$

En poursuivant de la même manière, on aura

$$dq=d\left(\frac{1}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)=d\left(\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x)}{dx^3}\right).$$
$$=\frac{dx^2d^3y-3dx\,d^2x\,d^2y+3dy\,d^2x^2-dxdyd^3x}{dx^4},$$

posant $dq=r\,dx$, on obtiendra

$$r=\frac{dx^2d^3y-3dx\,d^2x\,d^2y+3dy\,d^2x^2-dx\,dy\,d^3x}{dx^5}$$

Ces expressions de q, r, etc. sont indéterminées, tant qu'on n'assigne aucune relation entre les variables x, y et z; mais l'effet de cette relation établit une dépendance entre d^2x et d^2y, puisque z pouvant aussi être envisagé comme une fonction de x et de y, dz en est pareillement une de ces variables et de leurs différentielles, et la supposition de dz constant emporte l'équation $d^2z=0$.

Il n'est pas même nécessaire, pour obtenir cette dernière de connoître la relation primitive entre x, y et la variable z qu'on veut regarder comme indépendante; il suffit d'avoir l'expression de dz.

Si l'on prenoit, par exemple, pour cette variable l'arc de la courbe proposée, on auroit alors

$$dz=\sqrt{dx^2+dy^2};$$

et en différentiant dx et dy comme des fonctions de z, il viendroit

$$dx\,d^2x+dy\,d^2y=0:$$

chassant à l'aide de cette équation et de ses différentielles, les différentielles d^2x, d^3x, etc. des expressions de q, r, etc. on auroit les formes que prennent les coefficiens différentiels lorsqu'on fait varier x et y,

en conséquence du changement de l'arc z, ou lorsqu'on regarde cet arc comme la variable indépendante, ou enfin lorsqu'on prend sa différentielle pour constante.

Les considérations géométriques répondent très clairement à cette circonstance; car il est visible que pour particulariser le polygone $MM'M''$, *fig.* 2, qu'on se propose d'inscrire dans une courbe quelconque CM, il faut assigner une loi dans la succession des angles de ce polygone; nous avons d'abord pris les différences d'abscisses PP', $P'P''$, etc. égales entr'elles; mais on peut remplacer cette loi par tout autre: supposer, par exemple, que les côtés MM', $M'M''$, etc. soient égaux.

FIG. 2.

117. Tout ce qui précède ne porte que sur les signes et n'est enfin qu'une manière particulière d'écrire les coefficiens différentiels; car que y varie à cause du changement que subit spontanément x, ou à cause de celui que subit une autre variable z, de laquelle x dépend, tout cela revient au même pour les limites qui sont indépendantes des valeurs des accroissemens; aussi lorsqu'on différentie une équation entre x et y, en faisant varier dx aussi bien que dy, on peut transformer ensuite les résultats en coefficiens différentiels au moyen des formules du n°. 116, comme on le feroit en différentiant suivant le procédé du n°. 115: de l'une ou de l'autre manière on parvient au même résultat.

Les formules obtenues par la première sont en quelque sorte plus élégantes, parce que les deux variables y sont traités symétriquement.

L'expression du rayon de courbure qui est

$$\gamma = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx\,d^2y},$$

lorsqu'on fait dx constant et qui revient en général à

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{q}$$

lorsqu'on la transforme en coefficiens différentiels, prend la forme

$$\gamma=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$$

quand on ne suppose aucune différentielle pour constante, ou qu'on substitue pour p et q les formules du n°. 116. On verra dans la suite plusieurs autres conséquences de la Théorie que je viens d'exposer, sur laquelle on trouve, dans le premier chapitre du *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, des détails assez importans et qui n'avoient encore été donnés par personne que je sache, avant la publication de cet ouvrage.

118. D'après ce qu'on vient de voir on pourra toujours différentier le système de deux équations, contenant trois variables, système duquel il résulte que deux quelconques de ces variables sont des fonctions déterminées de la troisième. Si $U=0$ et $V=0$ désignent deux équations entre x, y et z, on en prendra les différentielles successives en faisant varier en même temps celle des deux indéterminées que l'on regarde comme fonction de la troisième.

Si l'on avoit trois équations $U=0$, $V=0$, $W=0$, entre quatre variables u, x, y, z, trois de ces variables, nécessairement déterminées par la quatrième, seroient des fonctions de celle-ci, et leurs différentielles devroient varier.

En général, un nombre m d'équations entre $m+1$ variables déterminant m de ces variables, au moyen de

celle qui reste, ne doit être regardé que comme contenant des fonctions de cette variable; il faut donc dans les différentiations successives de ces équations faire varier les différentielles des indéterminées qui représentent des fonctions de la variable qu'on a regardée comme indépendante, et dont on prend la différentielle pour constante.

119. Lorsqu'on a des équations de cette nature, on peut toujours en tirer un résultat unique, entre deux quelconques des variables, par un procédé que je vais exposer sur deux équations à trois variables, et qu'il sera facile d'étendre ensuite autant qu'on le voudra.

Soient $U=0$, $V=0$, ces équations, l'une de l'ordre m et l'autre de l'ordre n, entre les variables x, y, t et leurs différentielles, et dont on veuille éliminer t; la première pourra contenir outre la variable t, les différentielles dt, $d^2t \ldots d^mt$, et la seconde dt, $d^2t \ldots d^nt$. Comme on n'a point les équations primitives, ni toutes les différentielles des ordres inférieurs à ceux des proposées, il faut nécessairement se procurer de nouvelles équations pour chasser les quantités dt, d^2t, etc. comme des inconnues, et c'est ce qu'on fera en différentiant n fois l'équation $U=0$, et m fois l'équation $V=0$. On obtiendra par ce moyen $n+m$ équations nouvelles; et on en aura en tout un nombre $m+n+2$, en comptant les deux proposées: les inconnues à éliminer, savoir, t, dt, $d^2t \ldots\ldots d^mt \ldots\ldots d^{m+n}t$, étant au nombre de $m+n+1$, il restera donc une équation finale.

Si dt étoit constant, il sembleroit qu'en différentiant une seule fois l'une des équations proposées, on pourroit éliminer t et dt, puisqu'on auroit alors trois équations; mais on doit observer que les différentielles d^2x, d^2y, contiennent implicitement t, puisqu'alors on a

regardé x et y comme des fonctions de cette variable (118); il faut donc prendre pour constante la différentielle de l'une des variables que l'on veut conserver.

De la différentiation des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

120. Lorsque l'on n'a qu'une seule équation entre trois variables, il faut d'abord fixer arbitrairement les valeurs de deux quelconques de ces variables pour déterminer la troisième, qui par conséquent est une fonction des deux premières. Si l'on a par exemple l'équation

$$x^2+y^2+z^2=a^2;$$

on ne pourra obtenir z, sans avoir préalablement assigné des valeurs à x et à y; mais il convient d'observer que les quantités x et y n'étant liées entr'elles par aucune relation, la seconde peut demeurer la même, quoique la première ait changé, et réciproquement.

Il résulte de-là que la valeur de z peut varier de plusieurs manières, 1°. en conséquence d'un changement arrivé à x ou à y seul; 2°. par le concours de ces deux circonstances. Dans le premier cas, la quantité y, ou la quantité x étant regardées comme constantes, l'équation proposée revient au fond à une équation à deux variables; ainsi lorsque x change seul, on a

$$x\,dx+z\,dz=a, \text{ ou } x+z\frac{dz}{dx}=0,$$

et lorsque c'est y, il vient

$$y\,dy+z\,dz=0, \text{ ou } y+z\frac{dz}{dy}=0.$$

L'on a donc successivement

$$dz=-\frac{x\,dx}{z}, \qquad dz=-\frac{y\,dy}{z};$$

mais il faut observer que la première de ces différentielles est relative à la variabilité particulière de x, et la seconde à celle de y; c'est ce qu'on exprime en disant que l'une est la *différentielle partielle* relative à x, et l'autre la *différentielle partielle* relative à y.

Le sens de la question suffit pour empêcher qu'on ne les confonde, et on les distingue d'ailleurs suffisamment en faisant attention à la différentielle de la variable indépendante qui les affecte.

Les coefficiens différentiels analogues sont

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}, \qquad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}.$$

En général lorsqu'il s'agit d'une fonction de plusieurs variables, on doit bien se rappeler que dans $\frac{dz}{dx}$, dz est la différentielle partielle de z relativement à x, tandis que dans $\frac{dz}{dy}$, dz est la différentielle partielle relative à y.

121. Représentons par $f(x,y)$ une fonction quelconque de x et de y; en supposant d'abord que la variable x change seule et devienne $x+h$, il faudra regarder y comme une constante et traiter la fonction proposée de même qu'une fonction de x; on aura donc par le théorême du n°. 12, en faisant pour abréger $f(x,y)=u$,

$$f(x+h,y)=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si on vouloit trouver ce que devient la fonction proposée lorsque y seul prend un accroissement k, on regarderoit x comme une constante et $f(x,y)$, ou u,

comme une fonction de y; par-là on auroit

$$f(x,y+k)=u+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Supposons maintenant que les quantités x et y varient en même temps et deviennent $x+h$ et $y+k$; comme on n'a assigné aucune forme particulière à la fonction $f(x,y)$, il n'est pas possible d'y faire à la fois les deux substitutions indiquées; mais il est aisé de sentir qu'on parviendra au même résultat en changeant d'abord x en $x+h$, et en mettant ensuite $y+k$ pour y, dans le développement qu'on aura obtenu par la première opération.

On a déjà

$$f(x+h,y)=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

u représentant $f(x,y)$. Pour développer les coefficiens des différens termes de cette série, en ayant égard au changement arrivé à y, j'observerai d'abord que dans chacun d'eux, x doit être regardé comme une quantité constante, et qu'on doit les traiter par conséquent comme des fonctions de la seule variable y. D'après cela, $f(x,y)$, ou u, deviendra

$$u+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si dans ce développement on écrit $\frac{du}{dx}$, au lieu de u, on aura pour résultat ce que devient la fonction $\frac{du}{dx}$, lorsque y se change en $y+k$; c'est-à-dire,

$$\frac{du}{dx}+\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Mais il est aisé de voir que l'expression $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$ indique deux différentiations faites successivement sur la fonction proposée, la première en ayant égard à la variabilité de x seul, et la seconde en ne considérant que celle de y; nous la mettrons sous une forme plus simple en l'écrivant comme il suit : $\frac{d^2u}{dy\,dx}$. Nous représenterons de même $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}$ par $\frac{d^3u}{dy^2dx}$: en général, il faudra entendre par $\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$, le coefficient différentiel de l'ordre n relatif à la fonction $\frac{d^mu}{dx^m}$, en n'y supposant que y variable, tandis que cette fonction est elle-même le coefficient différentiel de l'ordre m de la fonction proposée, en n'y supposant que x variable.

Cela posé, la substitution de $y+k$ au lieu de y changera

$$\frac{du}{dx} \text{ en } \frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{k}{1}+\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^4u}{dy^3dx}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ etc.}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ en } \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^3u}{dydx^2}\frac{k}{1}+\frac{d^4u}{dy^2dx^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^5u}{dy^3dx^2}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ etc.}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} \text{ en } \frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^4u}{dydx^3}\frac{k}{1}+\frac{d^5u}{dy^2dx^3}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^6u}{dy^3dx^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ etc.}$$

etc.

En substituant ces valeurs dans le développement de $f(x+h,y)$, et en ordonnant de manière que tous les termes dans lesquels les exposans de h et de k font une même somme, soient placés dans une même colonne verticale, il viendra

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)=u+&\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} &&+\text{etc.}\\ &+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{k}{1}\frac{h}{1}+\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2}{1.2}\frac{h}{1} &&+\text{etc.}\\ &+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dydx^2}\frac{k}{1}\frac{h^2}{1.2} &&+\text{etc.}\\ &+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} &&+\text{etc.}\\ & &&+\text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

122. Nous avons obtenu le développement précédent en mettant d'abord $x+h$ au lieu de x, et ensuite $y+k$ au lieu de y, mais on auroit pu procéder dans un ordre inverse et commencer par la substitution relative à y; alors $f(x,y)$ seroit devenue

$$f(x,y+k),$$

ou

$$u+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

La substitution de $x+h$, au lieu de x, dans cette série, auroit changé u en

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy}\ \text{en}\ &\frac{du}{dy}+\frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}+\frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^4u}{dx^3dy}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\ \frac{d^2u}{dy^2}\ \text{en}\ &\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}+\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^5u}{dx^3dy^2}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\ \frac{d^3u}{dy^3}\ \text{en}\ &\frac{d^3u}{dy^3}+\frac{d^4u}{dxdy^3}\frac{h}{1}+\frac{d^5u}{dx^2dy^3}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^6u}{dx^3dy^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.} \end{aligned}$$

etc.

on auroit eu par conséquent

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+h)=u &+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} &&+\text{etc.}\\ &+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}\frac{k}{1}+\frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}\frac{k}{1} &&+\text{etc.}\\ &+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}\frac{k^2}{1.2} &&+\text{etc.}\\ &+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{h^3}{1.2.3} &&+\text{etc.}\\ & &&+\text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

Il est évident que ce second développement doit être identique avec le premier; car il est indifférent de changer d'abord x en $x+h$ et ensuite y en $y+k$, ou de faire les mêmes substitutions dans un ordre inverse, puisque d'une manière ou de l'autre on obtient également $f(x+h,y+k)$.

Si on compare dans ces deux développemens les termes qui sont affectés des mêmes puissances de h et de k, on trouvera cette suite d'équations,

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dydx}&=\frac{d^2u}{dxdy}\\ \frac{d^3u}{dyd x^2}&=\frac{d^3u}{dx^2dy}\\ \frac{d^3u}{dy^2dx}&=\frac{d^3u}{dxdy^2}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d^{n+m}u}{dy^ndx^m}&=\frac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n}\\ \text{etc.}&\qquad\text{etc.} \end{aligned}$$

La première nous apprend que le coefficient différentiel du second ordre d'une fonction de deux variables,

pris en différentiant par rapport à l'une d'elles et ensuite par rapport à l'autre, reste le même quel que soit l'ordre qu'on ait suivi dans les différentiations.

Soit, par exemple, $u=x^m y^n$; si on différentie d'abord en regardant x comme seule variable, on a $\frac{du}{dx}=m x^{m-1}y^n$; différentiant ensuite ce résultat, en ne faisant varier que y, on obtient $\frac{d^2u}{dy\,dx}=mnx^{m-1}y^{n-1}$: en opérant dans un ordre inverse, on trouve

$$\frac{du}{dy}=nx^m y^{n-1} \text{ et } \frac{d^2u}{dx\,dy}=mnx^{m-1}y^{n-1},$$

et on voit que le dernier résultat est le même dans les deux cas. Les autres équations rapportées ci-dessus ne sont que des conséquences de la première.

123. En retranchant $f(x,y)$ ou u de $f(x+h,y+k)$, on trouve

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)-f(x,y)=&\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} \quad \text{etc.}\\ &+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy\,dx}\frac{k}{1}\frac{h}{1} \quad \text{etc.}\\ &+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

Si on étend aux fonctions de deux variables la définition que nous avons donnée (5) de la différentielle d'une fonction, on verra que celle de $f(x,y)$ ou de u, est comprise dans les deux termes qui forment la première colonne du développement précédent, et en changeant h en dx et k en dy, nous aurons

$$df(x,y)=du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy.$$

Il suit de là que la différentielle d'une fonction de deux variables renferme deux parties, savoir: $\frac{du}{dx}dx$, ou la différentielle prise en regardant x comme seule variable, et $\frac{du}{dy}dy$, ou la différentielle prise en regardant y comme seule variable.

On peut donc appliquer aux fonctions de deux variables, les règles données (n°. 13 et suiv.) pour la différentiation de celles qui dépendent d'une seule, et pour cela *on différentiera la fonction proposée d'abord par rapport à l'une des variables, et ensuite par rapport à l'autre: la somme des deux résultats sera la différentielle cherchée.*

On voit sur le champ d'après cette règle que

$$\begin{aligned} d(x+y) &= dx+dy \\ d.xy &= y\,dx+x\,dy \\ d.\frac{x}{y} &= \frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}. \end{aligned}$$

124. Nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire de donner beaucoup d'exemples relatifs à la différentiation des fonctions de deux variables, puisqu'elle rentre dans celle des fonctions qui n'en contiennent qu'une. Nous nous bornerons donc aux suivans:

1°. $u=x^m y^n$; on a

$$\frac{du}{dx}dx = m\,x^{m-1}y^n dx$$

$$\frac{du}{dy}dy = n\,x^m y^{n-1}dy,$$

donc

$$du = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1}dy = x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx + nx\,dy).$$

2°. $u=\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$; on a

$$\frac{du}{dx}dx=-\frac{ayx\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{du}{dy}dy=\frac{a\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donc

$$du=\frac{-ayx\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou en réduisant

$$=\frac{-ayx\,dx+ax^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3°. $u=\text{Arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)$: cette expression est celle d'un arc de cercle dont le rayon est 1, et la tangente $\frac{x}{y}$; pour la différentier on fera $\frac{x}{y}=z$ et on cherchera d'après le n°. 35 la différentielle de l'arc dont la tangente est exprimée par z; il viendra pour résultat $\frac{dz}{1+z^2}$, on aura donc $du=\frac{dz}{1+z^2}$. Mettant au lieu de z et de dz leur valeur, on trouvera

$$du=\frac{\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2+x^2}.$$

125. La manière dont on écrit les différentielles des fonctions qui dépendent de plusieurs variables donne lieu à des remarques importantes. On a déjà

vu (120) qu'il ne faut pas confondre alors $\frac{du}{dx}dx$ avec du, comme on pourroit le faire si u ne renfermoit que la seule variable x, parce que l'expression $\frac{du}{dx}$ a dans ce cas un sens particulier; elle désigne le coefficient différentiel pris dans l'hypothèse de x seul variable, ou le quotient du premier terme du développement de la différence prise dans cette hypothèse, divisé par l'accroissement dx: il en est de même de $\frac{du}{dy}$.

Les quantités $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ sont appelées ordinairement *différences partielles* du premier ordre de la fonction u; et en général $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$ représente une de celles de l'ordre $m+n$, prise en différentiant m fois par rapport à x et n fois par rapport à y.

Je crois devoir observer que la dénomination de *différence partielle* n'est pas exacte; car les formules qu'on désigne ainsi n'expriment point la différence entre deux quantités. Les vraies *différences partielles* de u sont

$$f(x+h,y)-f(x,y),$$
$$f(x,y+k)-f(x,y),$$

la première étant prise, en n'ayant égard qu'au changement de x, et la seconde en ne supposant que celui de y. Les expressions

$$\frac{du}{dx}h, \quad \frac{du}{dx}k, \text{ ou } \frac{du}{dx}dx, \quad \frac{du}{dy}dy,$$

qui sont les premiers termes des développemens de ces différences doivent être nommées *différentielles partielles*, et $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ resteront toujours les *coefficiens différentiels*

rentiels du premier ordre de la fonction proposée, mais il faut remarquer qu'une fonction d'une seule variable n'a dans chaque ordre qu'un coefficient différentiel, tandis qu'une fonction de deux variables a deux coefficiens différentiels pour le premier ordre, trois pour le second, quatre pour le troisième, etc.

125. Voici comment on peut trouver ces divers coefficiens, en partant des deux premiers.

On a d'abord

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy;$$

prenant ensuite la différentielle des fonctions $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, qui doivent être traitées comme des fonctions de deux variables, il vient

$$d\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dy\,dx}dy$$
$$d\frac{du}{dy} = \frac{d^2u}{dx\,dy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy,$$

et parce que la différentielle seconde n'est autre chose que la différentielle de la différentielle première, on aura

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2,$$

en regardant dx et dy comme des constantes, et en observant que les coefficiens différentiels dont les dénominateurs ne présentent que les différens arrangemens d'un même produit en dx et dy sont identiques (122).

Si on différentie les coefficiens différentiels qui se trouvent dans le résultat précédent, il viendra

$$\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\mathrm{d}y,$$

et par conséquent

$$\mathrm{d}^3u=\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}x^3+\frac{3\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y+\frac{3\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\mathrm{d}y^3.$$

On continuera facilement cette formation, et on remarquera sans doute l'analogie de ces résultats avec les puissances du binome.

126. Il est aisé d'étendre ces considérations aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, et de s'assurer que si l'on a $u=\mathrm{f}(t,x,y,z)$, il en résultera

$$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z,$$

en désignant par

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\quad\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\quad\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},\quad\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z},$$

les coefficiens différentiels de la fonction u, pris en y faisant varier seulement ou t, ou x, ou y, ou z.

Cette notation, due à Fontaine, est la plus simple et la plus expressive de toutes celles qu'on a proposées pour remplir les mêmes indications. Euler, dans la crainte que l'on ne confonde, par exemple, le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ avec le rapport de la différentielle totale $\mathrm{d}u$ à la différentielle $\mathrm{d}x$, rapport qui est équivalent à

$$\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

désigne ce rapport par $\frac{du}{dx}$, tandis qu'il exprime le coefficient différentiel par $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Le sens du discours rend presque toujours cette distinction superflue; Fontaine d'ailleurs avoit pourvu au cas où elle étoit absolument nécessaire, en proposant d'écrire le rapport ainsi $\frac{1}{dx}du$, et sentant que ce rapport est employé beaucoup plus rarement que le coefficient différentiel, il avoit affecté à ce dernier le signe le plus simple, ce qui est conforme à la théorie de toutes les nomenclatures, et précisément contraire à ce qu'a fait Euler.

Considérant que l'on n'employe jamais le rapport des différentielles de deux quantités sans supposer, au moins tacitement, que l'une est fonction de l'autre, et que l'expression

$$\frac{\frac{du}{dt}dt+\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz}{dx}, \text{ ou } \frac{1}{dx}du,$$

n'a de sens qu'autant qu'on regarde les variables t, y et z comme dépendantes implicitement de x, j'ai proposé d'écrire cette expression ainsi :

$$\frac{d(u)}{dx},$$

renfermant la fonction entre deux parenthèses, pour montrer qu'on y faisoit varier non-seulement les termes affectés explicitement de x, mais aussi toutes les quantités qui pouvoient dépendre implicitement de celle-ci. Cette notation a, comme celle de Fontaine, l'avantage de consacrer le signe le plus simple au cas le plus fréquent.

127. Soit $u=0$ une équation renfermant x, y et z; si on regarde x et y comme les deux variables indépendantes, z sera une fonction de l'une et de l'autre, et lorsque x recevra un accroissement quelconque, y étant supposé constant, z éprouvera un changement subordonné à celui de x. Dans cette hypothèse, l'équation $u=0$ devra être envisagée comme une équation entre deux variables x et z; on aura donc (38)

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

et de là on tirera le coefficient différentiel de z relatif à la variabilité de x. Il faut se rappeler ici, d'après la distinction qui a été faite n°. 120, que dans $\frac{dz}{dx}$, dz n'est que la différentielle partielle de z, prise par rapport au changement de x seul.

Il est évident que si on eût fait varier y on auroit eu, en différentiant l'équation proposée comme ne contenant que les variables y et z,

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

Si on multiplie par dx la première des équations trouvées ci-dessus et la seconde par dy, et qu'on les ajoute ensuite, il viendra

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right)=0.$$

Mais $\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, n'est autre chose que la différentielle complète de z (123), on aura donc

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0,$$

c'est-à-dire, qu'on pourra égaler à zéro la différentielle

première de l'équation $u=0$, prise par rapport aux trois variables x, y et z. Il ne faut pas perdre de vue que cette différentielle doit être regardée comme équivalente à deux équations, car en y substituant pour dz sa valeur $\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, il faudra, à cause de l'indépendance des accroissemens dx et dy, que les quantités qui multiplient chacun d'eux, soient séparément égales à zéro.

128. On parviendra aux équations qui donnent les coefficiens des ordres supérieurs en différentiant les équations

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

Nous représenterons la première par $\frac{d(u)}{dx}=0$ et la seconde par $\frac{d(u)}{dy}=0$, conformément à la notation adoptée n°. 126; ces équations renfermeront encore les trois variables x, y et z, et pourront être traitées comme la proposée. En n'ayant d'abord égard qu'au changement de x, non-seulement z variera, mais en même temps le coefficient du premier ordre $\frac{dz}{dx}$, donnera naissance au coefficient du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$. En différentiant donc $\frac{d(u)}{dx}$ par rapport à x, on aura, comme pour les équations à deux variables,

$$\frac{d^2(u)}{dx^2}, \text{ ou } \frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dxdz}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}=0.$$

Si on différentie $\frac{d(u)}{dx}$, par rapport à y et à z, ou $\frac{d(u)}{dy}$, par rapport à x et à z, en observant que dans le premier cas, $\frac{dz}{dx}$ donne $\frac{d^2z}{dydx}$, et dans le second $\frac{dz}{dy}$ donne $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$, on aura un résultat unique, qui sera $\frac{d^2(u)}{dxdy}$, ou

$$\frac{d^2u}{dxdy}+\frac{d^2u}{dzdy}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dzdx}\frac{dz}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}=0.$$

Enfin l'équation $\frac{d(u)}{dy}=0$, différentiée, en regardant y et z comme seules variables, produira

$$\frac{d^2(u)}{dy^2}, \text{ ou } \frac{d^2u}{dy^2}+2\frac{d^2u}{dydz}\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dy^2}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Mais puisque z est une fonction de x et de y, on doit regarder u comme une fonction de ces variables, par conséquent on aura

$$d^2(u)=\frac{d^2(u)}{dx^2}dx^2+\frac{2d^2(u)}{dxdy}dxdy+\frac{d^2(u)}{dy^2}dy^2=0;$$

et en effet, si on substitue à

$$\frac{d^2(u)}{dx^2}, \qquad \frac{d^2(u)}{dxdy}, \qquad \frac{d^2(u)}{dy^2},$$

les résultats trouvés ci-dessus, et qu'on remplace

$$\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$$

par la différentielle première complète dz, et

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2+\frac{2d^2z}{dxdy}dxdy+\frac{d^2z}{dy^2}dy^2$$

par la différentielle seconde complète d^2z, on aura la même équation finale que celle qu'on auroit obtenue, si on avoit différentié

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0,$$

en regardant dx et dy comme constans, et z comme une fonction de x et de y.

129. On étendra sans peine ces considérations à tel ordre de différentiation, ou à tel nombre de variables qu'on voudra; car tout se réduit à déterminer celles qui sont indépendantes, ce qu'on ne peut faire que par la nature de la question qui a conduit à l'équation ou aux équations proposées; et ensuite on différentiera, par rapport à chacune de ces variables en particulier, en traitant les variables subordonnées comme étant implicitement des fonctions des variables indépendantes.

Si, par exemple, on avoit les deux équations

$$u=0, \qquad v=0,$$

entre les cinq variables s, t, x, y et z, on verroit que trois de ces variables sont indépendantes. Supposons donc que y et z soient les deux variables subordonnées, ou des fonctions de s, t, x, données par les équations proposées; on différentiera successivement u et v par rapport à s, par rapport à t, par rapport à x, et on aura :

$$\frac{du}{ds}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{ds}=0,$$
$$\frac{du}{dt}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}=0,$$
$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0.$$

Si on multiplie respectivement ces équations par ds, dt, dx, qu'on les ajoute et qu'on mette dy au lieu de

$$\frac{dy}{ds}ds+\frac{dy}{dt}dt+\frac{dy}{dx}dx,$$

dz au lieu de

$$\frac{dz}{ds}ds+\frac{dz}{dt}dt+\frac{dz}{dx}dx,$$

il viendra

$$\frac{du}{ds}ds+\frac{du}{dt}dt+\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=du=0.$$

On tirera un résultat semblable de l'équation $v=0$; et il s'ensuit, qu'en différentiant les équations $u=0$ et $v=0$, par rapport à toutes les variables s, t, u, x, y et z, et en y substituant au lieu de dy et de dz, les expressions de ces différentielles, considérées comme appartenant à des fonctions de trois variables (126), il faudra égaler séparément à zéro le coefficient de la différentielle de chaque variable indépendante.

En regardant les coefficiens différentiels eux-mêmes comme de nouvelles fonctions des variables indépendantes, on ne sauroit être arrêté dans la recherche des différentielles ultérieures; ainsi après quelques remarques sur l'élimination des constantes et des fonctions nous terminerons ce qui regarde la formation des équations différentielles.

130. L'équation $u=0$, entre x, y et z, ayant deux différentielles premières $\frac{d(u)}{dx}=0$ et $\frac{d(u)}{dy}=0$, il est évident qu'on peut éliminer deux constantes entre ces trois équations, et le résultat exprimera la relation

des variables x, y, z et des coefficiens $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, indépendamment des quantités éliminées.

Si on joint aux équations précédentes les trois du second ordre

$$\frac{d^2(u)}{dx^2}=0, \qquad \frac{d^2(u)}{dx\,dy}=0, \qquad \frac{d^2(u)}{dy^2}=0,$$

on aura six équations, entre lesquelles on pourra éliminer cinq quantités; et ainsi de suite.

131. Ceci nous conduit à une remarque importante, c'est qu'on peut éliminer d'une équation à trois ou à un plus grand nombre de variables, des fonctions dont la forme est absolument inconnue. Soit pour exemple l'équation $z=f(ax+by)$, dans laquelle la caractéristique f désigne une fonction dont la forme n'est déterminée en aucune manière; nous allons en déduire une équation entre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, indépendante de cette fonction et qui conviendra également à $z=ax+by$, à $z=\sqrt{ax+by}$, à $z=\sin(ax+by)$, et en général à toutes les fonctions de la quantité $ax+by$, de quelque forme qu'elles soient. Faisons pour cela $ax+by=t$; l'équation proposée deviendra $z=f(t)$, et par conséquent on aura $dz=f'(t)\,dt$, en représentant $\frac{df(t)}{dt}$ par $f'(t)$; mais

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy,$$

$$dt=\frac{dt}{dx}dx+\frac{dt}{dy}dy,$$

donc

$$\frac{dz}{dx}=f'(t)\frac{dt}{dx}, \qquad \frac{dz}{dy}=f'(t)\frac{dt}{dy}.$$

Mettant pour $\frac{dt}{dx}$ et $\frac{dt}{dy}$ leurs valeurs a et b, éliminant $f'(t)$, il viendra

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0.$$

Cette équation exprime un caractère au moyen duquel on pourra reconnoître si une quantité proposée est une fonction de $ax+by$ ou non; car d'après sa formation elle doit être satisfaite ou devenir identique, toutes les fois qu'on y substituera au lieu de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ les valeurs qui résulteroient de la différentiation d'une fonction de $ax+by$. Supposons qu'on ignorât l'origine du polynome $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$: en l'égalant à z, et en différentiant on trouvera

$$\frac{dz}{dx} = 2a^2x + 2aby, \quad \frac{dz}{dy} = 2abx + 2b^2y;$$

ces valeurs mises dans l'équation $b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0$, la rendent identique: on en conclura donc que le polynome représenté par z, est une fonction de $ax+by$, ce qui est d'ailleurs évident, puisque

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2 = (ax+by)^2.$$

On voit en général que $u=0$ étant une équation entre x, y, z, et une fonction quelconque indéterminée représentée par $f(t)$ et dans laquelle on ne connoît que la composition de t en x, y et z, on pourra toujours éliminer $f(t)$ et $f'(t)$ à l'aide des équations

$$u=0, \quad \frac{d(u)}{dx}=0, \quad \frac{d(u)}{dy}=0.$$

En passant au second ordre le nombre d'équations devenant plus grand, il est possible, dans beaucoup de cas, d'éliminer deux fonctions indéterminées; mais je n'entrerai point dans ces détails, non plus que dans ce qui regarde les équations qui renferment plus de trois variables.

132. Nous dirons ici très-peu de choses sur la manière de réduire en séries les fonctions de deux variables, parce qu'il arrive le plus souvent qu'on ne les développe que par rapport à l'une des variables qu'elles contiennent, en supposant à l'autre une valeur constante, et qu'alors elles doivent être traitées de même que les fonctions d'une seule variable. Il sera peut-être utile néanmoins de faire voir que la formule du n°. 121, s'emploie à développer les fonctions de deux variables, comme celle du n°. 21 s'applique aux fonctions qui n'en renferment qu'une.

Si on fait $x=0$ et $y=0$ dans la formule du n°. 121, c'est-à-dire, dans u et dans chacun de ses coefficiens différentiels, elle donnera le développement de $f(h,k)$ ordonné suivant les puissances des quantités h et k; mais on pourra écrire x au lieu de h, et y au lieu de k, et il en résultera

$$f(x,y)=u+\frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y\right\}+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx}x^2+2\frac{d^2u}{dxdy}xy+\frac{d^2u}{dy^2}y^2\right\}+\text{etc.}$$

en observant de faire x et y nuls, tant dans u que dans les expressions qu'on obtiendra pour chacun des coefficiens différentiels.

On pourroit encore obtenir le développement de $f(x,y)$ par la différentiation, ainsi qu'on est parvenu à celui de $f(x)$ dans le n°. 19; car si on suppose

$$u = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \text{etc.}$$

les lettres A, B, C, etc. désignant des quantités indépendantes de x et de y, et qu'on différentie cette équation par rapport à x et par rapport à y, plusieurs fois de suite, de manière à obtenir les expressions des coefficiens différentiels

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \text{ etc.}$$

on aura, en égalant à zéro x et y après les différentiations,

$$\frac{du}{dx} = B, \qquad \frac{du}{dy} = C,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1.2D, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 1.1.E, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 1.2F, \text{ etc.}$$

à l'égard de A, on trouvera sa valeur en cherchant celle de la fonction u, lorsque x et y sont nuls.

Recherche des maxima *et des* minima *des fonctions de deux variables.*

133. Si dans une fonction de deux variables, on en regarde une constante, et qu'on donne à l'autre une infinité de valeurs, à chacune de ces valeurs il correspondra une ou plusieurs valeurs de la fonction proposée, parmi lesquelles il pourra s'en trouver qui soient des *maxima* ou des *minima* et qu'on déterminera en égalant à zéro le coefficient différentiel relatif à la variable à laquelle on a attribué les changemens de la fonction (48).

Ainsi u étant une fonction de x et de y, si on suppose y constant et qu'on fasse $\frac{du}{dx}=0$, on obtiendra les valeurs de x qui donnent les plus grandes et les plus petites valeurs de u, parmi toutes celles qui répondent à une même valeur de y.

Le résultat qu'on obtient de cette manière est encore indéterminé, puisqu'il peut varier à raison des changemens qu'on fera subir à la seconde variable y, et n'offre par conséquent que des *maxima* ou des *minima* relatifs, parmi lesquels il en existe nécessairement un nombre limité qui surpassent ou qui sont moindres que tous les autres, et qui répondent à des valeurs déterminées de y. Ces derniers qui sont entièrement déterminés sont des *maxima* ou des *minima* absolus de la fonction proposée; on les découvriroit aisément en chassant x de la fonction u, au moyen de l'équation $\frac{du}{dx}=0$, ce qui rendroit u fonction de y seul; et en désignant le résultat par v, il suffiroit alors de faire $\frac{dv}{dy}=0$, pour déterminer y convenablement à l'état de la question (48).

On peut parvenir à une équation équivalente à $\frac{dv}{dy}=0$, sans qu'il soit besoin d'éliminer x; pour cela il faut observer que l'équation $\frac{du}{dx}=0$, fournie par la condition du *maximum* ou du *minimum* relatif à x, établit une relation entre les variables x et y, en sorte qu'on doit regarder la première comme une fonction de la seconde. En différentiant dans cette hypothèse on aura (126)

$$\frac{d(u)}{dy}=\frac{du}{dx}\,\frac{dx}{dy}+\frac{du}{dy}=0,$$

résultat qui se réduit à $\frac{du}{dy}=0$, puisque par la condition relative à x, on a déjà $\frac{du}{dx}=0$.

On détermine donc les valeurs de x et de y qui donnent les *maxima* et les *minima* absolus de la fonction u, au moyen des équations

$$\frac{du}{dx}=0, \qquad \frac{du}{dy}=0.$$

En étendant ces considérations aux fonctions de tant de variables qu'on voudra, on trouvera que *pour obtenir les* maxima *et les* minima *absolus de ces fonctions, il faut égaler séparément à zéro les coefficiens différentiels du premier ordre de ces fonctions, pris par rapport à chacune des variables dont elles dépendent.*

134. Les caractères distinctifs des *maxima* et des *minima* dans les fonctions de plusieurs variables se tirent de principes analogues à ceux qu'on a employés à l'égard des fonctions d'une seule variable (49), mais l'application en est plus compliquée, c'est pourquoi je me bornerai à ce qui regarde les fonctions de deux variables.

Soit u une fonction de x et de y; soient

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F, \text{ etc.}$$

ce que deviennent respectivement

$$u, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \frac{d^2u}{dy^2},$$

lorsqu'on y met a au lieu de x et b au lieu de y, le résultat de la substitution de $a+h$, $b+k$, dans u,

sera (121)

$$A+Bh+Ck$$
$$+\frac{1}{1.2}\{Dh^2+2Ehk+Fk^2\}$$
$$+\text{etc.}$$

expression dont la valeur doit être moindre que A, lors du *maximum* absolu, et plus grande lors du *minimum* absolu, quels que soient les signes des lettres h, k, pourvu qu'elles n'expriment que de petits changemens. Mais comme les termes du premier ordre, Bh, Ck, qu'on peut rendre plus considérables que tous les autres, en prenant h et k d'une petitesse convenable, changent de signe en même temps que ces quantités, un raisonnement semblable à celui du n°. 48, fera voir qu'ils doivent être nuls dans le cas du *maximum* ou du *minimum*; on aura donc d'abord

$$B=\frac{du}{dx}=0, \qquad C=\frac{du}{dy}=0, \text{ etc.}$$

comme il résulte de la règle énoncée dans le n°. précéd.

Ces conditions étant remplies par les valeurs de a et de b, déterminées en conséquence, il faudra ensuite que les coefficiens D, E et F, ne s'évanouissent pas en même temps, et de plus que le signe de la quantité du second ordre, qui forme la deuxième ligne du développement ci-dessus, soit indépendant des rapports qu'on pourroit établir entre h et k et de leurs signes.

On sait, par la théorie des équations algébriques, que toute expression de la forme de leur premier membre, lorsque le second est zéro, ne peut passer du positif au négatif, sans devenir nulle dans l'intervalle; et que quand elles n'ont que des racines imaginaires, elles ne changent point de signe, quelque valeur qu'on

donne à l'inconnue. Il suit de là que si la quantité

$$Dh^2+2Ehk+Fk^2,$$

égalée à zéro et résolue, comme une équation, par rapport à l'une des indéterminées h ou k, ne donne que des racines imaginaires, on en pourra conclure qu'elle conservera le même signe quelles que soient ces indéterminées. Prenant la valeur de h, par exemple, on trouve

$$h=\frac{k(-E\pm\sqrt{-FD+E^2})}{D},$$

résultat qui sera imaginaire, si la quantité comprise sous le radical est négative; c'est-à-dire, si l'on a $FD>E^2$. Il faut bien remarquer que cette condition nécessaire pour qu'il y ait *maximum* ou *minimum* suppose que les quantités F, D sont toujours de même signe. Alors la quantité $Dh^2+2Ehk+Fk^2$ ne pourra changer de signe; et comme elle se réduit à Dh^2, lorsque $k=0$, il faudra pour qu'elle soit positive, ou qu'il y ait *minimum*, que D soit positif: il y aura *maximum* dans le cas contraire.

135. Pour se convaincre *à posteriori*, que lorsque les conditions qu'on vient de trouver seront remplies, l'ensemble des termes du second ordre de la série $A+Bh+Ck+$ etc. restera toujours de même signe, quels que soient h et k, il suffira de remarquer que le premier membre de l'équation du second degré dont les racines sont

$$h=-\alpha\pm\sqrt{-\beta^2},$$

ayant la forme

$$(h+\alpha)^2+\beta^2$$

est la somme de deux quarrés, et ne peut par conséquent changer

changer de signe. En faisant

$$\alpha = \frac{Ek}{D}, \quad \beta^2 = \frac{(FD - E^2)k^2}{D^2}$$

l'expression de h conduit à

$$\left(h + \frac{Ek}{D}\right)^2 + \frac{(FD - E^2)k^2}{D^2} = h^2 + \frac{2E}{D}hk + \frac{F}{D}k^2$$
$$= \frac{1}{D}(Dh^2 + 2Ehk + Fk^2),$$

et l'on voit bien maintenant que la quantité $Dh^2 + 2Ehk + Fk^2$ ne peut changer de signe tant que $FD - E^2$ sera une quantité positive, puisque le quarré de $h + \frac{Ek}{D}$ est essentiellement positif quels que soient les signes de h et de k.

Euler, dans son Calcul différentiel, n'indiqua que la nécessité d'avoir D et F positifs ou négatifs en même temps; Lagrange montra le premier que cette condition n'étoit pas suffisante, et on lui doit la théorie que nous venons d'exposer.

Si les coefficiens du second ordre s'anéantissoient en même temps que ceux du premier, il n'y auroit *maximum* ou *minimum* qu'autant que les coefficiens du troisième disparoîtroient aussi, et que les termes du quatrième ordre formeroient une quantité dont le signe ne dépendroit aucunement de h et de k. La considération des facteurs imaginaires que devroit avoir cette quantité pour satisfaire à la condition demandée, meneroit à des résultats analogues aux précédens. Au reste, j'observerai que, quoi qu'il arrive après la substitution de a et de b, dans u et dans ses coefficiens differentiels, il faut toujours que les résultats obtenus par la supposition de $x = a \pm h$, $y = b \pm k$, soient

tous moindres ou tous plus grands que celui qui répond à $x=a$, $y=b$; et que les diverses méthodes propres à faire reconnoître si cela a lieu, le seront aussi pour s'assurer de l'existence du *maximum* ou du *minimum*.

136. Pour donner un exemple, j'ai choisi la question suivante, analogue à celle du n°. 50 : *partager la quantité* a *en trois parties* x, y, a—x—y, *telles que le produit* $x^m y^n (a-x-y)^p$ *soit un* maximum.

On a alors

$$u = x^m y^n (a-x-y)^p$$

$$\frac{du}{dx} = x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1} \{ma-mx-my-px\} = 0$$

$$\frac{du}{dy} = x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1} \{na-nx-ny-py\} = 0;$$

les facteurs $ma-mx-my-px$ et $na-nx-ny-py$, étant égalés à zéro, donnent

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \quad y = \frac{na}{m+n+p}; \quad a-x-y = \frac{pa}{m+n+p}.$$

Pour savoir si ces valeurs appartiennent en effet à un *maximum*, on les substituera dans les expressions générales de

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2u}{dy^2};$$

en faisant pour abréger $m+n+p=q$, on trouvera

$$D = -(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}$$

$$E = -\frac{mna}{q}\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}$$

$$F = -(n+)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}.$$

Les quantités D et F sont négatives, et on s'assurera sans peine qu'elles remplissent la condition $DF-E^2>0$, lorsque les exposans m, n, p, sont positifs, ainsi on aura obtenu le *maximum* demandé.

Notions générales sur l'application du Calcul différentiel à la Théorie des courbes à double courbure et des surfaces courbes.

137. J'ai donné beaucoup de détails sur cette Théorie, dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*; on y trouve un extrait fort étendu des recherches de Monge réunies et liées avec celles qu'Euler et plusieurs autres Géomètres ont faites sur le même sujet. Ici je me bornerai aux problêmes les plus simples sur cette matière.

On sait (*Trig. appendice*) que deux équations primitives entre trois variables se représentent par une courbe à double courbure, tandis qu'une seule équation entre trois variables appartient à une surface. Lorsqu'on veut appliquer le Calcul différentiel aux courbes à double courbure, on peut les considérer comme les limites de polygones dont trois côtés consécutifs ne sauroient être dans le même plan. Le prolongement de l'un de ces côtés donne la tangente de même que dans les courbes planes.

On aura facilement les équations de la tangente MT, *fig.* 35, en observant que ses projections sont elles-mêmes tangentes à celles de la courbe XM; et comme il suffit de connoître deux projections de cette droite, nous choisirons celle qui se trouve sur le plan des x et y et celle que contient le plan des y et z. En désignant donc par x', y' et z' les coordonnées du point M, FIG. 35.

l'équation de la droite $T'M'$, tangente à la projection $X'M'$, sera

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x') \quad (67),$$

et celle de $T''M''$, tangente à $X''M''$, sera

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x').$$

Supposons que des équations des courbes $X'M'$ et $X''M''$ on ait tiré les valeurs de y' et de z', en x', et qu'après la substitution de ces valeurs dans les équations de la tangente on élimine x', on aura la relation qui doit exister entre les coordonnées x, y et z de la tangente TM, quelle que soit la position du point M, et par conséquent l'équation de la surface formée par toutes les tangentes de la courbe XM. On reconnoîtra par là si cette courbe est plane ou non; car dans le premier cas la surface dont on vient de parler sera nécessairement un plan, et dans le second une surface courbe.

138. Deux tangentes consécutives TM et tm, déterminent le plan qui passe par deux côtés consécutifs, et qu'on nomme *plan osculateur*. On peut trouver son équation en le regardant comme passant par trois points consécutifs de la courbe proposée : soit donc $Ax+By+Cz+D=0$ son équation (*Trig. appendice*); il faudra qu'on ait d'abord $Ax'+By'+Cz'+D=0$, puisqu'il doit contenir le point dont les coordonnées sont x', y' et z'; et pour que les deux points suivans s'y trouvent aussi, il faudra de plus que la différentielle première, et la différentielle seconde de son équation, ayent lieu en même temps que celles des équations de la courbe proposée.

On pourroit prendre une des différentielles dx', dy', ou dz' pour constante (118); mais il sera plus symétrique de les traiter toutes comme variables en même temps, et il viendra

$$Adx'+Bdy'+Cdz'=0, \quad Ad^2x'+Bd^2y'+Cd^2z'=0,$$

d'où on tirera

$$\frac{A}{C}=\frac{dy'd^2z'-dz'd^2y'}{dx'd^2y'-dy'd^2x'}, \qquad \frac{B}{C}=\frac{dz'd^2x'-dx'd^2z'}{dx'd^2y'-dy'd^2x'};$$

retranchant l'équation $Ax'+By'+Cz'+D=0$
de $Ax+By+Cz+D=0$,

mettant ensuite pour $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ leurs valeurs, et faisant disparoître les dénominateurs, nous trouverons le résultat suivant, remarquable par sa forme,

$$(x'-x')(dy'd^2z'-dz'd^2y')+(y-y')(dz'd^2x'-dx'd^2z')$$
$$+(z-z')(dx'd^2y'-dy'd^2x')=0.$$

En y substituant pour deux quelconques des trois coordonnées x', y', z', leurs valeurs tirées des équations de la courbe proposée, on aura l'équation du plan osculateur particularisé par la coordonnée restante.

159. La différentielle de l'arc d'une courbe considérée dans l'espace, a pour expression

$$\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}.$$

Cela se voit évidemment en prenant la distance des points M et m, dont les coordonnées respectives sont

$$x', y', z', x'+dx', y'+dy', \text{ et } z'+dz'.$$

140. Mener une normale à une courbe considérée dans l'espace est un problème indéterminé, car il existe

un nombre infini de droites, qui passant par le point de contact, sont en même temps perpendiculaires à la tangente ; l'ensemble de ces droites forme un plan perpendiculaire à cette tangente, et que nous nommerons *plan normal* : son équation sera (*Trig. appendice*)

$$(x-x')\frac{dx'}{dz'}+(y-y')\frac{dy'}{dz'}+(z-z')=0,$$

ou $(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0$

141. Soient x, y et z les coordonnées d'un point M, FIG. 36. *fig.* 36. situé sur une surface courbe quelconque ; on pourra regarder l'ordonnée $M'M=z$ comme une fonction des deux abscisses $AP=x$ et $PM'=y$. Lorsque x variant seul, deviendra $x+h$, on aura pour le développement de l'ordonnée $m'm$, prise dans la section RMm faite par un plan parallèle à celui des x et z et passant par le point proposé, la série

$$z+\frac{dz}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si c'est y qui se change en $y+k$, et que x demeure constant, on obtiendra l'ordonnée $n'n$, prise dans la section PMn faite par un plan parallèle à celui des y et z et passant par le point proposé. Le développement de cette ordonnée sera

$$z+\frac{dz}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3z}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

En faisant varier x et y en même temps, on passera du point M à un point quelconque N, et cela de deux manières différentes, savoir, en substituant $y+k$ au lieu de y dans le premier développement ci-dessus, ou bien $x+h$ au lieu de x dans le second. Par l'une de ces opérations on passe de l'ordonnée $m'm$ à l'ordon-

née $N'N$, dans la section pmN, et par l'autre on passe de $n'n$ à $N'N$, dans la section rnN. Il est évident que ces deux sections doivent se rencontrer au point N, sans quoi la surface proposée ne seroit pas continue ; il faut donc que les résultats rapportés dans les nos. 121 et 122 soient identiques. L'équation $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$, à laquelle tient cette circonstance, n'est donc que l'expression de la loi de continuité.

Lorsque dans la série

$$z+\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}k$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}h^2+2\frac{d^2z}{dxdy}hk+\frac{d^2z}{dy^2}k^2\right)$$
$$+\text{etc.}$$

qui représente le développement de la valeur de z, correspondante à $x+h$ et à $y+k$, on cessera de regarder les quantités h et k comme indépendantes l'une de l'autre, et qu'on établira un rapport entr'elles, on fixera la direction du plan mené perpendiculairement à celui des x et y, par les deux points M et N, car

$$\frac{k}{h}=\frac{N'm'}{M'm'}=\text{tang } N'M'm'.$$

Il suit des considérations précédentes, et de ce qui a été dit n°. 127, que si $u=0$ représente l'équation d'une surface courbe, les équations différentielles

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0 \text{ et } \frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=0,$$

appartiendront respectivement aux deux sections RMm et PMn ; la coordonnée y n'entrera dans la première que comme une constante arbitraire, qui détermine la position du plan coupant : il en sera de même de la

coordonnée x dans la seconde. On ne doit pas confondre le dz de l'une de ces équations avec celui de l'autre : ces deux différentielles ne sont que partielles, ainsi qu'on l'a fait remarquer n°. 120 ; car la différentielle complète, ou l'ensemble des termes du premier ordre, a pour expression

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy=p\,dx+q\,dy,$$

en faisant pour abréger $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$. Lorsqu'on a seulement $dz=p\,dx$, le dz est la différentielle de l'ordonnée de la section parallèle au plan des x et z; semblablement $dz=q\,dy$ est celle de l'ordonnée de la section parallèle au plan des y et z.

Si on prend $dy=\alpha\,dx$, la différentielle complète $dz=dx(p+\alpha q)$, appartiendra à l'ordonnée de la section faite par le plan $M'MNN'$, perpendiculaire à celui des x et y, en supposant $N'm'=\alpha\times M'm'$. On trouvera des choses analogues, en prenant successivement pour ordonnées chacune des variables x et y, et en regardant les deux autres comme les abscisses.

142. On parvient à l'équation du plan tangent en l'assujettissant à passer par les deux droites MT et Mt qui touchent respectivement les sections RMm et PMn, au point M (*Compl. des Elém. de Géom.*). Les fonctions $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ étant les coefficiens différentiels de l'ordonnée z', considérée successivement dans chacune de ces sections, et les droites MT et Mt étant de plus parallèles aux plans des x et z et des y et z, il est aisé

de voir que les équations de MT seront

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x'), \quad y-y'=0,$$

et que celles de Mt seront

$$z-z'=\frac{dz'}{dy'}(y-y'), \quad x-x'=0.$$

Maintenant si on représente l'équation du plan tangent par

$$z-z'=A(x-x')+B(y-y'),$$

il est évident que cette équation doit s'accorder avec les précédentes, et pour cela il faut qu'en y faisant successivement $y-y'=0$ et $x-x'=0$, on trouve

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x') \text{ et } z-z'=\frac{dz'}{dy'}(y-y');$$

mais elle donne par ces suppositions

$$z-z'=A(x-x') \text{ et } z-z'=B(y-y'):$$

on en conclura donc,

$$A=\frac{dz'}{dx'}=p, \quad B=\frac{dz'}{dy'}=q,$$

et par conséquent

$$z-z'=p(x-x')+q(y-y').$$

On pourroit craindre que le plan tangent déterminé, comme on vient de le voir, ne touchât la surface proposée que sur les deux sections que l'on a considérées: mais en différentiant son équation par rapport à x et à y seul, on aura $dz=p\,dx+q\,dy$, ce qui prouve que lorsqu'on prendra $dx=dx'$ et $dy=dy'$, on aura $dz=dz'$, et que par conséquent les points de la surface proposée, qui environnent immédiatement le point M, coïncident tous avec ceux du plan tangent, tant qu'on n'a égard qu'aux quantités du premier ordre. Il suit de là qu'un plan quelconque, mené par le point M, coupe la surface proposée dans une courbe

qui a deux points communs avec le plan tangent, ou, ce qui est la même chose, a pour tangente l'intersection de ce plan avec le plan coupant (67).

143. La normale à une surface, étant perpendiculaire au plan tangent, a pour équations (*Trig. append.*)

$$x-x'+p(z-z')=0,$$
$$y-y'+q(z-z')=0.$$

On parvient encore à ces équations, en observant que la normale est la plus courte ligne qu'on puisse mener d'un point quelconque à cette surface; car si x, y, z, désignent les coordonnées de ce point, la distance au point de la surface proposée dont les coordonnées sont x', y', z', aura pour expression

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

et en différentiant cette expression pour en trouver le *minimum* (133), on aura

$$(x-x')\,dx'+(z-z')\,dz'=0$$
$$(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0:$$

ce résultat devient semblable au précédent lorsque l'on met successivement $p\,dx'$ et $q\,dy'$ pour dz'.

144. Il convient de remarquer que lorsqu'on cherche le *maximum* ou le *minimum* d'une fonction de z', dépendante de x' et de y', on établit que le plan tangent à la surface qui représente cette équation est parallèle au plan des x, y, puisqu'on fait en même temps $\frac{dz'}{dx'}=0$, $\frac{dz'}{dy'}=0$, circonstance analogue à ce qu'on a vu n°s. 133 et 134.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

De l'intégration des fonctions rationnelles d'une seule variable.

145. Le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel; il a pour but de remonter des coefficiens différentiels aux fonctions dont ils dérivent. L'exposition des principes de ce Calcul présente des divisions analogues à celles que nous a offert le Calcul différentiel. Il peut arriver que la composition des coefficiens différentiels de la fonction cherchée soit donnée immédiatement par les variables indépendantes, ou qu'on ait seulement une équation entre quelques-uns de ces coefficiens, et une ou plusieurs des variables: le premier cas étant le plus simple, c'est celui qu'il convient de traiter d'abord.

Lorsque le coefficient différentiel du premier ordre d'une fonction de x est donné en x, on a $\frac{dy}{dx}=X$, ou $dy=X\,dx$. La fonction cherchée est donc celle dont la différentielle est $X\,dx$; on l'indique comme il suit : $y=\int X\,dx$, la caractéristique $\int$ étant l'inverse de la caractéristique d (*). Pour trouver cette fonction, il faut renverser les règles de la différentiation ; mais afin de procéder avec ordre, nous nous occuperons successivement des différentes formes que peut avoir la fonction donnée X, et que nous classerons ainsi qu'il suit :

fonctions rationnelles,

$$Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots\ldots=U$$

$$\frac{Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots\ldots}{A'x^{m'}+B'x^{n'}+C'x^{p'}+\ldots}=\frac{U}{V},$$

fonctions irrationnelles,

$$U.\sqrt[n]{V^m},$$

fonctions transcendantes,

$$f(U, lU),\ f(U, \sin V),\ \text{etc.}$$

(*) La lettre $\int$ a été employée par ceux qui ont écrit les premiers sur le Calcul intégral, comme l'initiale du mot *somme*, parce que, suivant les idées de Léibnitz, les différentielles représentant les accroissemens infiniment petits des variables, il s'ensuit qu'une variable quelconque est la somme du nombre infini d'accroissemens qu'elle a reçus depuis son origine jusqu'au moment où on la considère ; et c'est pour cela qu'ils ont donné à la fonction que nous appelons *primitive* le nom d'*Intégrale*, comme étant le résultat de l'agrégation de toutes les différentielles : ces dénominations étant bien entendues, nous pourrons nous servir indifféremment de l'une ou de l'autre.

146. La différentielle de Ax^m+B, étant $mAx^{m-1}dx$, on en conclura que l'intégrale de $ax^n dx$ est $\frac{ax^{n+1}}{n+1}+B$, car en comparant $ax^n dx$ avec $mAx^{m-1}dx$, on a $m-1=n$, et $mA=a$ ou $A=\frac{a}{m}=\frac{a}{n+1}$.

Il résulte de cet exemple, que lorsque $dy=ax^n dx$, $y=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+B$; la constante B est arbitraire (8). On peut lui donner une forme semblable à celle du premier terme; car si on désigne par b la valeur de x, qui rend la fonction y nulle, on aura $\frac{ab^{n+1}}{n+1}+B=0$, d'où $B=-\frac{ab^{n+1}}{n+1}$, et par conséquent

$$y=\frac{a(x^{n+1}-b^{n+1})}{n+1}$$

résultat qui ne diffère du précédent que dans la forme qu'on a donnée à la constante.

147. Avant d'aller plus loin il est à propos d'examiner un cas particulier dans lequel la valeur de y trouvée ci-dessus, devient $\frac{0}{0}$; c'est celui où $n=-1$, car on a alors

$$y=\frac{a(x^0-b^0)}{0}=\frac{a(1-1)}{0}=\frac{0}{0}.$$

Pour trouver la vraie valeur de cette fonction, il faut recourir à la règle du n°. 52; et nous avons fait voir par cette règle, page 66, que $\frac{a^x-b^x}{x}$ se réduisoit à $la-lb$, dans la supposition de $x=0$; nous aurons dans l'exemple actuel, en changeant les lettres conve-

nablement, $y=a(lx-lb)$; mais lorsque $n=-1$ on a $dy=ax^{-1}dx$: donc $dy=\frac{a\,dx}{x}$ donne

$$y=a(lx-lb) \text{ ou } y=alx+B.$$

On auroit conclu la même chose du n°. 27, puisque par ce numéro, l'on a $dlx=\frac{dx}{x}$. L'exception que présente ici la règle du n°. 146, tient à l'impossibilité d'exprimer la transcendante lx en un nombre fini de termes algébriques.

Toute la difficulté de l'intégration des fonctions d'une seule variable, ne consiste plus que dans la recherche des transformations propres à réduire les fonctions proposées à un ou plusieurs monomes, à chacun desquels on puisse appliquer la règle du n°. précédent.

148. Il est d'abord évident que

$$dy=ax^m dx+bx^n dx+cx^p dx.....$$

donne

$$y=\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{n+1}}{n+1}+\frac{cx^{p+1}}{p+1}....+B.$$

Je n'ajoute qu'une constante arbitraire, car il est aisé de voir que si on en ajoutoit une pour chaque monome, elles n'équivaudroient toutes ensemble qu'à une seule, qui seroit égale à leur somme.

En général, puisqu'on a vu, n°. 10, que

$$d(u+v-w)=du+dv-dw,$$

on en doit conclure que

$$\int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw,$$

et que

$$\int(Pdx+Qdx-Rdx)=\int Pdx+\int Qdx-\int Rdx.$$

Nous ferons remarquer dès ce moment une conséquence de cette règle, qui nous sera fort utile dans la suite. En intégrant à part chaque terme de la différentielle $\mathrm{d}.uv=u\,\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$ (11), il vient $uv=\int v\mathrm{d}u+\int u\mathrm{d}v$, ce qui donne une relation entre les fonctions primitives des différentielles $u\,\mathrm{d}v$, $v\,\mathrm{d}u$, en sorte que l'une étant connue, l'autre l'est aussi: on a par exemple, $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$. La différentielle

$$\mathrm{d}.\frac{u}{v}=\frac{\mathrm{d}u}{v}-u\frac{\mathrm{d}v}{v^2}\ (12),$$

donnera de même

$$\frac{u}{v}=\int\frac{\mathrm{d}u}{v}-\int u\frac{\mathrm{d}v}{v^2},$$

d'où on tirera

$$\int u\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-\frac{u}{v}+\int\frac{\mathrm{d}u}{v}.$$

Il est bon de remarquer que ce résultat n'est qu'une conséquence du précédent; car en substituant dans la valeur de $\int u\,\mathrm{d}v$, trouvée ci-dessus $\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$ au lieu de $\mathrm{d}v$, ce qui revient à changer v en $-\frac{1}{v}$, puisque

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=v^{-2}\mathrm{d}u=-\mathrm{d}.v^{-1}=-\mathrm{d}.\frac{1}{v},$$

on aura

$$\int u\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-\frac{u}{v}+\int\frac{\mathrm{d}u}{v}.$$

Il suit de ce que $\mathrm{d}.au=a\mathrm{d}u$, que $\int aX\mathrm{d}x=a\int X\mathrm{d}x$, et qu'on peut faire sortir du signe $\int$ la constante a.

149. Si on se donnoit $\mathrm{d}y=(ax+b)^m\mathrm{d}x$, on développeroit la puissance indiquée, et on intégreroit chaque monome qui résulteroit de cette opération; mais

il est bon d'observer qu'on peut arriver au résultat sans effectuer le développement. Il suffit de faire $ax+b=z$, ce qui donne $x=\frac{z-b}{a}$, $dx=\frac{dz}{a}$; substituant dans l'expression de dy, on trouve $dy=\frac{z^m dz}{a}$ et par conséquent $y=\frac{z^{m+1}}{a(m+1)}+B$. Mettant pour z sa valeur, on aura donc, lorsque $dy=(ax+b)^m dx$,

$$y=\frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+B.$$

Si on avoit $dy=(ax^n+b)^m x^{n-1}dx$, la transformation réussiroit encore, car en posant $ax^n+b=z$, il en résulteroit $nax^{n-1}dx=dz$, d'où

$$x^{n-1}dx=\frac{dz}{na},\quad dy=\frac{z^m dz}{na}\quad\text{et}\quad y=\frac{z^{m+1}}{na(m+1)}+B,$$

ce qui donne, lorsque

$$dy=(ax^n+b)^m x^{n-1}dx,\quad y=\frac{(ax^n+b)^{m+1}}{na(m+1)}+B.$$

150. Passons aux fonctions fractionnaires, et pour commencer par le cas le plus simple, supposons qu'on ait $dy=\frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$; en faisant $ax+b=z$, on trouve

$$x=\frac{z-b}{a},\qquad dx=\frac{dz}{a},$$

et par conséquent

$$dy=\frac{A(z-b)^m dz}{a^{m+1}z^n};$$

développant la puissance $(z-b)^n$, multipliant le résultat par dz et divisant après par z^n, on aura une suite de monomes à intégrer.

Prenons

Prenons pour exemple le cas où $m=3$ et $n=2$; il viendra

$$dy=\frac{A(z-b)^3dz}{a^4z^2}=\frac{A}{a^4}[zdz-3bdz+3b^2z^{-1}dz-b^3z^{-2}dz]:$$

en appliquant à chacun de ces monomes la règle générale, il en résultera

$$y=\frac{A}{a^4}\left[\frac{z^2}{2}-3bz+3b^2lz+b^3z^{-1}\right]+B.$$

On remettra ensuite pour z sa valeur, et on aura enfin,

lorsque $$dy=\frac{Ax^3dx}{(ax+b)^2},$$

$$y=\frac{A}{a^4}[\tfrac{1}{2}(ax+b)^2-3b(ax+b)+3b^2l(ax+b)+b^3(ax+b)^{-1}]+B.$$

On construiroit sans peine la formule générale; et si on avoit

$$dy=\frac{Ax^ndx+Bx^pdx+Cx^qdx.....}{(a+bx)^m},$$

on l'écriroit comme il suit

$$dy=\frac{Ax^ndx}{(a+bx)^m}+\frac{Bx^pdx}{(a+bx)^m}+\frac{Cx^qdx}{(a+bx)^m}.....$$

et on opéreroit sur chaque terme en particulier, comme nous venons de faire sur le premier.

151. Les différentielles fractionnaires et rationnelles sont en général de la forme

$$\frac{(Ax^m+Bx^n+Cx^p....)dx}{A'x^{m'}+B'x^{n'}+C'x^{p'}.},$$

que pour abréger nous représenterons par $\frac{Udx}{V}$. Il faut d'abord observer que l'exposant de x dans le numérateur peut être supposé moindre que dans le dénomi-

nateur, car si cela n'étoit pas, en divisant U par V, et nommant Q le quotient de cette division et R le reste, il viendroit $\int\frac{U\mathrm{d}x}{V}=\int Q\mathrm{d}x+\int\frac{R\mathrm{d}x}{V}$; mais Q étant une fonction rationnelle et entière, $\int Q\mathrm{d}x$ s'obtiendroit par l'application immédiate de la règle du n°. 146, et il ne resteroit plus à trouver que $\int\frac{R\mathrm{d}x}{V}$, formule dans laquelle la fonction R est par rapport à x d'un degré moins élevé que la fonction V. La forme la plus générale que puisse avoir la fraction $\frac{U\mathrm{d}x}{V}$ sera donc

$$\frac{(Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots+T)\mathrm{d}x}{x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}\ldots+T'}.$$

La méthode générale pour intégrer les différentielles exprimées par des fractions rationnelles, consiste à les décomposer en d'autres dont les dénominateurs soient plus simples, qu'on désigne sous le nom de *fractions partielles* et qu'on obtient comme il suit :

En égalant à zéro le dénominateur de la fraction proposée, on formera l'équation

$$x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}\ldots\ldots+T'=0,$$

et concevant qu'on ait déterminé les diverses racines de cette équation, on les représentera par

$$-a,\quad -a',\quad -a'',\quad -a''',\text{ etc.}$$

en supposant qu'elles soient toutes inégales ; par ce moyen, le premier membre de l'équation ci-dessus, ou le dénominateur de la fraction proposée, sera mis sous la forme d'un produit de n facteurs

$$x+a,\quad x+a',\quad x+a'',\quad x+a''',\text{ etc.}$$

Cela fait, on regardera la fraction proposée comme la somme des fractions

$$\frac{N}{x+a}, \quad \frac{N'}{x+a'}, \quad \frac{N''}{x+a''}, \text{ etc.}$$

ayant pour dénominateurs les facteurs du dénominateur de la proposée et pour numérateurs des constantes indéterminées.

Supposons pour fixer les idées que la différentielle à intégrer soit celle-ci

$$\frac{(Ax^2+Bx+C)\,dx}{x^3+A'x^2+B'x+C'}$$

et qu'on ait trouvé

$$x^3+A'x^2+B'x+C'=(x+a)(x+a')(x+a'').$$

En réduisant au même dénominateur les fractions

$$\frac{N\,dx}{x+a}, \quad \frac{N'\,dx}{x+a'}, \quad \frac{N''\,dx}{x+a''},$$

et en les ajoutant il viendra

$$\frac{N(x+a')(x+a'')+N'(x+a)(x+a'')+N''(x+a)(x+a')}{(x+a)(x+a')(x+a'')}\,dx,$$

le dénominateur sera le même que celui de la proposée, et le numérateur sera nécessairement une fonction du degré inférieur à celui du numérateur, c'est-à-dire, du second degré. En développant on a en effet

$$[(N+N'+N'')x^2+(N(a'+a'')+N'(a+a'')+N''(a+a'))x + Na'a''+N'aa''+N''aa']dx.$$

Cette fonction qui renferme les trois indéterminées N, N', N'', étant comparée avec le numérateur de la fraction proposée donne les trois équations

$$N+N'+N''=A,$$
$$N(a'+a'')+N'(a+a'')+N''(a+a')=B$$
$$Na'a''+N'aa''+N''aa'=C;$$

supposant qu'on ait résolu ces équations qui ne sont

que du premier degré, on aura alors

$$\frac{(Ax^2+Bx+C)\mathrm{d}x}{x^3+A'x^2+B'x+C'}=\frac{N\mathrm{d}x}{x+a}+\frac{N'\mathrm{d}x}{x+a'}+\frac{N''\mathrm{d}x}{x+a''}.$$

En faisant $x+a=z$, on verra que la différentielle $\frac{N\mathrm{d}x}{x+a}$ se transforme en $\frac{N\mathrm{d}z}{z}$ et a pour intégrale $N\mathrm{l}z$ ou $N\mathrm{l}(x+a)$. On trouvera de même que

$$\int\frac{N'\mathrm{d}x}{x+a'}=N'\mathrm{l}(x+a'),\quad \int\frac{N''\mathrm{d}x}{x+a''}=N''\mathrm{l}(x+a'');$$

et on aura par conséquent

$$\int\frac{(Ax^2+Bx+C)\mathrm{d}x}{x^3+A'x^2+B'x+C'}$$
$$=N\mathrm{l}(x+a)+N'\mathrm{l}(x+a')+N''\mathrm{l}(x+a'')+const.$$
$$=\mathrm{l}[(x+a)^N(x+a')^{N'}(x+a'')^{N''}]+const.$$

Ce procédé, qu'il est facile d'étendre à la formule générale citée au commencement de l'article, montre que l'intégration des fractions rationnelles n'a, dans le cas où leur dénominateur se décompose en facteurs réels et inégaux, d'autre difficulté que cette décomposition qui revient à la résolution numérique des équations.

152. Nous avons supposé que tous les facteurs du dénominateur de la fraction proposée, étoient inégaux entr'eux; mais dans le cas contraire, la décomposition de cette fraction ne pourra plus avoir lieu dans la forme que nous avons adoptée: on le voit immédiatement sur $\frac{Ax+B}{(x+a)^2}$, qu'on ne sauroit représenter par $\frac{N}{x+a}+\frac{N'}{x+a}$, puisque ces deux fractions n'en forment qu'une seule $\frac{N+N'}{x+a}$.

Si le dénominateur $x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}\ldots+T'$, de la fraction proposée, renferme un facteur $(x+a)^p$, il faudra prendre pour ce facteur une fraction partielle de la forme

$$\frac{(Px^{p-1}+Qx^{p-2}+Rx^{p-3}\ldots+Y)\mathrm{d}x}{(x+a)^p};$$

et on déterminera les coefficiens de son numérateur en le réduisant au même dénominateur avec les autres fractions partielles et en comparant la somme des numérateurs avec celui de la proposée (151).

On intégreroit par la règle du n°. 150 cette fraction partielle; mais on peut aussi faire

$$\frac{(Px^{p-1}+Qx^{p-2}+\ldots.+Y)\,\mathrm{d}x}{(x+a)^p}$$

$$=\frac{N\mathrm{d}x}{(x+a)^p}+\frac{N'\mathrm{d}x}{(x+a)^{p-1}}+\frac{N''\mathrm{d}x}{(x+a)^{p-2}}\ldots+\frac{N'''\ldots\mathrm{d}x}{x+a}.$$

Il est facile de voir qu'en réduisant au même dénominateur toutes les fractions du second membre, le numérateur qu'on obtiendra sera de la même forme que celui du premier. Cela posé, soit $x+a=z$, il viendra

$$\int\frac{N\mathrm{d}x}{(x+a)^p}=\int\frac{N\mathrm{d}z}{z^p}=\frac{Nz^{-p+1}}{1-p}=\frac{N}{(1-p)(x+a)^{p-1}};$$

on trouvera de même

$$\int\frac{N\mathrm{d}x}{(x+a)^{p-1}}=\frac{N}{(2-p)(x+a)^{p-2}}$$

et ainsi des autres: toutes ces intégrales seront algébriques, la dernière seule, $\int\frac{N'''\ldots\mathrm{d}x}{x+a}$, renfermera un logarithme.

153. Si les valeurs de a, a', a'', etc. étoient imaginaires, elles introduiroient des expressions de cette nature dans les numérateurs des fractions partielles : on pourroit à la vérité faire disparoître les imaginaires ; mais cela compliqueroit le calcul, et on évite cette difficulté en ne décomposant le dénominateur de la fraction proposée qu'en facteurs réels, soit du premier soit du second degré, ce qui est toujours possible (*compl. des Elém. d'Alg.* 24). Les facteurs du second degré, qui contiennent des racines imaginaires, peuvent être représentés par

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2;$$

et s'il s'en trouve plusieurs qui soient égaux, le dénominateur de la fraction proposée aura des facteurs de la forme

$$(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q.$$

Au facteur simple $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, correspondra une fraction partielle de la forme

$$\frac{(Kx+L)\,dx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2},$$

et aux facteurs de la seconde espèce, la fraction

$$\frac{(Q'x^{2q-1}+R'x^{2q-2}\ldots+Y')dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q}.$$

Les coefficiens des numérateurs pourront se déterminer ainsi qu'on l'a indiqué dans les n°s 151, 152.

Pour intégrer la première des fractions ci-dessus, on observera que

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=(x+\alpha)^2+\beta^2;$$

on fera

$$x+\alpha=z,$$

il viendra

$$\frac{(Kx+L)\,dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{(Kz+L-K\alpha)\,dz}{z^2+\beta^2}=\frac{(Kz+L_1)\,dz}{z^2+\beta^2},$$

en prenant $L-K\alpha=L_1$.

Mais $$\frac{(Kz+L_1)\,dz}{z^2+\beta^2}=\frac{Kz\,dz}{z^2+\beta^2}+\frac{L_1\,dz}{z^2+\beta^2};$$

la première partie du second membre de l'équation ci-dessus est intégrable; car en faisant $z^2+\beta^2=u$, on a $z\,dz=\frac{du}{2}$, ce qui donne

$$\int\frac{Kz\,dz}{z^2+\beta^2}=\frac{K}{2}\int\frac{du}{u}=K.\frac{1}{2}lu=Kl\sqrt{z^2+\beta^2}.$$

Quant à la seconde partie, si on y fait $z=\beta u$, on la change en

$$\frac{L_1\,dz}{z^2+\beta^2}=\frac{L_1}{\beta}\frac{du}{u^2+1};$$

mais on a vu, n°. 35, que $\frac{du}{1+u^2}$ est la différentielle de l'arc dont la tang$=u$; donc

$$\int\frac{L_1}{\beta}\frac{du}{u^2+1}=\frac{L_1}{\beta}\text{arc (tang}=u)+const.$$
$$=\frac{L_1}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{z}{\beta}\right)+const.$$

réunissant ces deux résultats, on obtiendra

$$\int\frac{(Kz+L_1)\,dz}{z^2+\beta^2}=Kl\sqrt{z^2+\beta^2}+\frac{L_1}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{z}{\beta}\right)+const.$$

Il est bon de remarquer que l'arc dont la tangente est $\frac{z}{\beta}$ a pour sinus $\frac{z}{\sqrt{z^2+\beta^2}}$, pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{z^2+\beta^2}}$; car

cette considération offre le moyen de présenter l'intégrale proposée sous plusieurs formes, en désignant l'arc par son sinus ou par son cosinus.

Lorsqu'on remet pour z sa valeur, on trouve

$$\int \frac{(Kx+L)\,dx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = const. + K\,l\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} + \frac{L-K\alpha}{\beta}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$$

154. Pour obtenir l'intégrale de l'expression

$$\frac{(Q'x^{2q-1}+R'x^{2q-2}\ldots.+Y')\,dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q},$$

on lui donnera la forme

$$\frac{(Kx+L)\,dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q} + \frac{(K'x+L')\,dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{q-1}} \cdots + \frac{(K'''\cdots x+L''\cdots)\,dx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2};$$

tout se réduira alors à intégrer la différentielle

$$\frac{(Kx+L)\,dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q}.$$

Je supposerai qu'on ait fait $x+\alpha=z$ et $L-K\alpha=L_1$; par ce moyen on n'aura plus à traiter que $\frac{(Kz+L_1)dz}{(z^2+\beta^2)^q}$, et je vais montrer que cette dernière peut se ramener à

$$\int \frac{H\,dz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}}.$$

Pour cela, on la décomposera en deux parties

$$\int \frac{Kz\,dz}{(z^2+\beta^2)^q} + \int \frac{L_1\,dz}{(z^2+\beta^2)^q}.$$

La première est intégrable immédiatement, et cela se voit en faisant $z^2+\beta^2=u$, puisqu'on a $z\,dz=\frac{du}{2}$,

d'où l'on tire

$$\int \frac{K z\,dz}{(z^2+\beta^2)^q} = \int \frac{K\,du}{2u^q} = \frac{K u^{-q+1}}{2(1-q)}.$$

On supposera ensuite

$$\int \frac{L_1 dz}{(z^2+\beta^2)^q} = \frac{Gz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}} + \int \frac{H dz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}};$$

prenant les différentielles de chaque membre, réduisant au même dénominateur tous les termes du résultat et supprimant ce dénominateur, ainsi que le facteur commun dz, on trouvera

$$L_1 = G(z^2+\beta^2) - 2(q-1)Gz^2 + H(z^2+\beta^2);$$

en comparant les termes semblables on formera deux équations,

$$L_1 = G\beta^2 + H\beta^2, \qquad G - 2(q-1)G + H = 0,$$

lesquelles donneront

$$G = \frac{L_1}{(2q-2)\beta^2}, \qquad H = \frac{(2q-3)L_1}{(2q-2)\beta^2};$$

on aura par conséquent

$$\int \frac{L_1 dz}{(z^2+\beta^2)^q} = L_1 \left\{ \frac{1}{(2q-2)\beta^2} \cdot \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-1}} + \frac{(2q-3)}{(2q-2)\beta^2} \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Si dans cette équation on met $q-1$ à la place de q et qu'on y fasse $L_1 = 1$, il viendra

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}} = \frac{1}{(2q-4)\beta^2} \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-2}} + \frac{(2q-5)}{(2q-4)\beta^2} \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-2}};$$

substituant cette valeur dans la même équation (a), il en résultera

$$\int \frac{L_1 dz}{(z^2+\beta^2)^q} = L_1 \left\{ \frac{1}{(2q-2)\beta^2} \cdot \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-1}} + \frac{1.(2q-3)}{(2q-2)(2q-4)\beta^4} \cdot \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-2}} + \frac{(2q-3)(2q-5)}{(2q-2)(2q-4)\beta^4} \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-2}} \right\} \ldots\ldots\ldots (b).$$

L'équation (a) donnera encore la valeur de $\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-2}}$, en changeant q en $q-2$ et faisant $L_1=1$; si on remet ensuite cette valeur dans l'équation (b), on aura

$$\int \frac{L_1 dz}{(z^2+\beta^2)^q} = L_1 \left\{ \frac{1}{(2q-2)\beta^2} \cdot \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-1}} + \frac{1.(2q-3)}{(2q-2)(2q-4)\beta^4} \cdot \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-2}} + \frac{1.(2q-3)(2q-5)}{(2q-2)(2q-4)(2q-6)\beta^6} \cdot \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-3}} + \frac{(2q-3)(2q-5)(2q-7)}{(2q-2)(2q-4)(2q-6)\beta^6} \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-3}} \right\} \ldots\ldots (c).$$

Si on déduisoit encore de l'équation (a) la valeur de $\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-3}}$, on auroit une nouvelle valeur de $\int \frac{L_1 dz}{(z^2+\beta^2)^q}$, qui dépendroit de $\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-4}}$. En continuant d'opérer ainsi, on formera une suite, qu'il faudra borner au terme $\int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$; car le terme suivant, affecté de $\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^0}$, auroit un coefficient infini. On peut s'en assurer en faisant successivement $q=2$, et $q=3$, dans les équations (b) et (c); et il est

aisé de sentir à quoi tient cette circonstance ; car si l'on pouvoit arriver jusqu'au terme dont nous venons de parler, on auroit algébriquement l'intégrale de la fraction proposée, puisque

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^\circ} = \int dz.$$

On voit ici l'origine d'une méthode d'intégration qui est aussi féconde qu'élégante ; c'est celle par laquelle on passe d'une intégrale à une autre : nous la développerons par la suite d'une manière plus générale.

En rapprochant les résultats des n^os précéd. on remarquera sans doute, que les différentielles qui se présentent sous la forme de fractions rationnelles, peuvent toujours s'intégrer, soit algébriquement, soit par le moyen des logarithmes ou des arcs de cercle, et qu'il n'est besoin pour les préparer, que de les décomposer en fractions dont les dénominateurs soient des binomes ou des trinomes. Nous n'avons encore indiqué pour cette opération que la méthode des coefficiens indéterminés, parce que c'est celle qui se présente la première ; mais nous allons maintenant faire connoître plusieurs procédés, qui exigent moins de calcul.

155. Reprenons la fraction $\frac{U}{V}$, et supposons que $x+a$ soit un des facteurs inégaux du dénominateur V, en sorte qu'on ait $V=(x+a)Q$; posons ensuite $\frac{U}{V}=\frac{A}{x+a}+\frac{P}{Q}$, P étant une fonction indéterminée de x, mais dans laquelle cette quantité n'entre point comme diviseur ; on aura $U=AQ+P(x+a)$, d'où on tirera $P=\frac{U-AQ}{x+a}$. Comme P est une fonction entière,

par rapport à x, il faut que la quantité $U-AQ$, qui est aussi une fonction rationnelle et entière de x, soit divisible par $x+a$, ou, ce qui est la même chose, s'évanouisse lorsqu'on mettra au lieu de x, la valeur $-a$ que donne le facteur $x+a$ égalé à zéro : désignant donc par u et par q, ce que deviennent U et Q après cette substitution qui ne change rien à la valeur de l'indéterminée A, puisqu'elle est indépendante de x, on aura $u-Aq=0$, et par conséquent $A=\frac{u}{q}$.

Cette valeur exige qu'on connoisse la fonction Q, donnée par l'équation $V=(x+a)Q$, et on la trouvera toujours en divisant V par $x+a$: le Calcul différentiel y conduit aussi d'une manière fort simple, car en différentiant l'équation ci-dessus, on a

$$\frac{dV}{dx}=Q+(x+a)\frac{dQ}{dx};$$

si on fait dans ce résultat $x+a=0$, et qu'on représente par v ce que devient alors $\frac{dV}{dx}$, on aura $v=q$; d'où $A=\frac{u}{v}$.

L'expression $A=\frac{u}{q}$ aura toujours une valeur finie; car le numérateur et le dénominateur ne sauroient devenir nuls, puisque la fraction proposée est réduite à sa plus simple expression et que par conséquent la fonction U ne peut contenir le facteur $x+a$ qui fait partie du dénominateur, et qui ne s'y trouvant qu'une fois, n'entre point non plus dans Q. En appliquant d'une manière convenable ce raisonnement aux différens cas que nous allons parcourir, on se convaincra que la dé-

composition d'une fraction rationnelle quelconque, dans les formes que nous avons indiquées, est toujours possible.

156. Voyons maintenant comment on peut trouver les numérateurs des fractions partielles qui répondent aux facteurs égaux du premier degré. Dans ce cas on a $V=Q(x+a)^n$, et on doit supposer

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{(x+a)^n}+\frac{A_1}{(x+a)^{n-1}}+\frac{A_2}{(x+a)^{n-2}}\ldots+\frac{A_{n-1}}{x+a}+\frac{P}{Q};$$

en réduisant au même dénominateur, il viendra

$$U=Q[A+A_1(x+a)+A_2(x+a)^2\ldots+A_{n-1}(x+a)^{n-1}]+P(x+a)^n,$$

$$P=\frac{U-Q[A+A_1(x+a)+A_2(x+a)^2\ldots+A_{n-1}(x+a)^{n-1}]}{(x+a)^n};$$

et comme P doit être une fonction entière, il faudra que le numérateur de son expression soit divisible n fois de suite par $x+a$; ce numérateur s'évanouira donc lorsqu'on y mettra $-a$ au lieu de x. On voit d'abord qu'il se réduit dans ce cas à $U-QA$, mais pour que $U-QA$ soit divisible par $x+a$, il faut, en conservant les mêmes dénominations que dans le n°. précédent, qu'on ait

$$u-qA=0 \text{ ou } A=\frac{u}{q}.$$

Cette valeur changera la quantité $U-QA$ en $U-\frac{u}{q}Q$ qui se divisera par $x+a$, et on aura en effaçant en même temps ce facteur dans le dénominateur, et faisant pour abréger $U-\frac{u}{q}Q=U_1(x+a)$,

$$P=\frac{U_1-Q[A_1+A_2(x+a)\ldots.+A_{n-1}(x+a)^{n-2}]}{(x+a)^{n-1}}.$$

Maintenant pour obtenir A_1, on fera $x+a=0$, et en

désignant par u_1, ce que devient U_1, par la substitution de $-a$ à la place de x, on aura $u_1 - qA_1 = 0$, ou $A_1 = \frac{u_1}{q}$.

Mettant ensuite au lieu de A_1 sa valeur dans $U_1 - QA_1$, il en résultera la quantité $U_1 - \frac{u_1}{q} Q$ qui, s'évanouissant lorsque $x+a=0$, sera divisible par $x+a$; le numérateur deviendra donc encore divisible par $x+a$, et par conséquent P se réduira à

$$P = \frac{U_2 - Q\left[A_2 + A_3(x+a) \ldots + A_{n-1}(x+a)^{n-3}\right]}{(x+a)^{n-2}},$$

U_2 représentant le quotient de la division de $U_1 - \frac{u_1}{q} Q$ par $x+a$. En continuant le même procédé et la même notation, on trouvera encore $u_2 - qA_2 = 0$, d'où $A_2 = \frac{u_2}{q}$ et ainsi des autres.

Le Calcul différentiel facilite beaucoup les opérations précédentes. En effet, le numérateur de la valeur de P devant être divisible par $(x+a)^n$, sera nécessairement de la forme $X(x+a)^n$, X étant une fonction entière de x, mais qui ne contient pas le facteur $x+a$; et d'après la remarque du n°. 52, toutes les différentielles de ce numérateur, jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ inclusivement, s'évanouiront lorsqu'on supposera $x+a=0$. En lui donnant la forme suivante

$$Q\left\{\frac{U}{Q} - A - A_1(x+a) - A_2(x+a)^2 - A_3(x+a)^3 \ldots\right\}$$

et en observant que la fonction Q ne contient point le facteur $x+a$, il est évident que c'est seulement la partie

de cette expression, renfermée dans la parenthèse, qui doit devenir divisible par $(x+a)^n$. Les différentielles de cette partie sont

$$\mathrm{d}.\frac{U}{Q}-A_1\mathrm{d}x-2A_2(x+a)\mathrm{d}x-3A_3(x+a)^2\mathrm{d}x\ldots,$$

$$\mathrm{d}^2.\frac{U}{Q}-2A_2\mathrm{d}x^2-2.3A_3(x+a)\mathrm{d}x^2\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}^3.\frac{U}{Q}-2.3A_3\mathrm{d}x^3$$

etc.

Ces résultats devant s'évanouir lorsqu'on y fera $x+a=0$, conduiront aux équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{U}{Q}-A=0\\ \mathrm{d}.\dfrac{U}{Q}-A_1\mathrm{d}x=0\\ \mathrm{d}^2.\dfrac{U}{Q}-2A_2\mathrm{d}x^2=0\\ \mathrm{d}^3.\dfrac{U}{Q}-2.3A_3\mathrm{d}x^3=0\\ \text{etc.}\end{array}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{array}{l}A=\dfrac{u}{q}\\ A_1=\dfrac{1}{1.\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\dfrac{U}{Q}\\ A_2=\dfrac{1}{1.2.\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}^2.\dfrac{U}{Q}\\ A_3=\dfrac{1}{1.2.3\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}^3.\dfrac{U}{Q}\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

pourvu qu'après les différentiations, on substitue $-a$ au lieu de x.

Le moyen le plus simple pour obtenir la valeur de Q dans ce cas, est de diviser V par $(x+a)^n$, cependant on peut y parvenir par la différentiation, comme dans le n°. précédent; car puisqu'on a $V=Q(x+a)^n$, en différentiant un nombre n de fois chacun des membres de cette équation, et faisant ensuite $x+a=0$, on trouvera $\mathrm{d}^nV=1.2.\ldots.nQ\mathrm{d}x^n$ (52), et par conséquent

$$Q=\frac{\mathrm{d}^nV}{1.2.\ldots.n\mathrm{d}x^n}.$$

On parviendra à l'expression des différentielles de Q dans l'hypothèse de $x+a=0$, en prenant successivement celles de l'ordre $n+1$, $n+2$, etc. de l'équation $V=Q(x+a)^n$; car il est aisé de voir, d'après la remarque du n°. 52, que dans ce cas $d^{n+1}V=d^{n+1}.Q(x+a)^n$; par exemple, se réduit à $d^{n+1}V=1.2.3...(n+1)dQdx^n$. Il suit de là qu'on pourra exprimer les indéterminées A_1, A_2, A_3, etc. à l'aide des différentielles du numérateur U et de celles du dénominateur V, de la fraction proposée; dans ce procédé il seroit peut-être plus commode de différentier le numérateur de l'expression de P sous la forme où il se présente d'abord, ce qui donneroit, en supprimant les termes affectés de $x+a$, les équations

$$dU-AdQ-A_1Qdx=0$$
$$d^2U-Ad^2Q-2A_1dQdx-2A_2Qdx^2=0$$
$$d^3U-Ad^3Q-3A_1d^2Qdx-6A_2d^2Qdx^2-6A_3Qdx^3=0$$

etc.

La première inconnue A sera déterminée d'ailleurs par l'équation $U-AQ=0$, dans laquelle, ainsi que dans les précédentes, après la différentiation, il ne faut pas oublier d'écrire $-a$ au lieu de x.

157. Proposons-nous maintenant de trouver le numérateur d'une fraction partielle de la forme

$$\frac{Ax+B}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}.$$

Soit

$$\frac{U}{V}=\frac{Ax+B}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}+\frac{P}{Q};$$

en réduisant le second membre au même dénominateur que le premier, on trouve

$$U=Q(Ax+B)+P(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2),$$

d'où

d'où on tire ensuite

$$P=\frac{U-Q(Ax+B)}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}.$$

Comme P doit toujours être une fonction entière par rapport à x, il faut que la quantité $U-Q(Ax+B)$, soit divisible par $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$; elle doit donc renfermer au nombre de ses facteurs, ceux de cette dernière, et s'évanouir par conséquent dans les mêmes circonstances. Mais les facteurs de $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, sont $x+\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $x+\alpha-\beta\sqrt{-1}$; si on les égale à zéro, on aura $x=-(\alpha+\beta\sqrt{-1})$, $x=-(\alpha-\beta)\sqrt{-1})$: ces valeurs étant substituées successivement dans $U-Q(Ax+B)$, doivent faire évanouir cette quantité. Désignant donc par $u\pm u'\sqrt{-1}$, et par $q\pm q'\sqrt{-1}$, ce que deviennent U et Q, après cette transformation on aura

$$u\pm u'\sqrt{-1}-(q\pm q'\sqrt{-1})[-A(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+B]=0.$$

Cette équation est double à cause du signe $\pm$ dont sont affectés plusieurs de ses termes, et elle est équivalente à celles qu'on formeroit, en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire; d'après cette considération on aura

$$u+q\alpha A+q'\beta A-qB=0,$$
$$u'+q\beta A+q'\alpha A-q'B=0,$$

équations qui donneront les valeurs de A et de B.

On peut trouver Q comme dans le n°. 155. En effet, si on différentie l'équation

$$Q(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)=V,$$

et qu'on fasse ensuite

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0,$$

il viendra

$$Q(2x\,dx+2\alpha\,dx)=dV, \text{ ou } Q=\frac{dV}{2x\,dx+2\alpha\,dx};$$

substituant au lieu de x ses deux valeurs $-(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})$, représentant par $\nu\pm\nu'\sqrt{-1}$, ce que devient alors $\frac{dV}{dx}$, et écrivant $q\pm q'\sqrt{-1}$ pour Q, il viendra

$$q\pm q'\sqrt{-1}=\frac{\nu\pm\nu'\sqrt{-1}}{\mp 2\beta\sqrt{-1}};$$

multipliant les deux termes de la fraction du second membre par $\sqrt{-1}$, et égalant ensuite les parties réelles et les parties imaginaires de chaque membre, on aura $q=-\frac{\nu'}{2\beta}$, $q'=-\frac{\nu}{2\beta}$.

158. Si le facteur $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, se trouvoit plusieurs fois dans le dénominateur V, et qu'on eût

$$V=Q(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n,$$

on prendroit dans ce cas (153),

$$\frac{U}{V}=\frac{Ax+B}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{n-1}}$$
$$+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{n-2}}+\ldots+\frac{P}{Q};$$

réduisant au même dénominateur, et tirant la valeur de P, on trouvera

$$P=\frac{\left\{\begin{array}{l}U-Q[Ax+B+(A_1x+B_1)(x+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)\\ \quad+(A_2x+B_2)(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)\ldots\ldots\end{array}\right\}}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n}.$$

En raisonnant dans le cas actuel comme dans les précédens, on conclura que le numérateur de cette ex-

pression doit s'évanouir par la substitution $-(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})$; et gardant les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura après cette opération

$$u\pm u'\sqrt{-1}-(q\pm q'\sqrt{-1})[-A(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+B]=0,$$

ce qui donnera pour déterminer A et B, les mêmes équations que dans le n°. précédent. Ayant trouvé les valeurs de ces quantités, on les substituera dans le numérateur de P, et les termes $U-Q(Ax+B)$ devenant divisibles par $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, l'expression entière le deviendra aussi. Nommant donc U_1, le quotient de $U-Q(Ax+B)$ par $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, on aura

$$P=\frac{U_1-Q[A_1x+B_1+(A_2x+B_2)(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)\ldots]}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{n-1}};$$

en remettant dans ce nouveau numérateur pour x, les valeurs que donne l'équation $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$, et égalant le résultat à zéro, on déterminera A_1 et B_1, comme on a déterminé plus haut A et B, et on continuera d'opérer de la même manière, pour parvenir aux valeurs des lettres A_2, B_2, A_3, B_3....

Ce cas est parfaitement analogue à celui qu'on a traité dans le n°. 156; et le Calcul différentiel s'applique de la même manière, à l'un et à l'autre. En effet, puisque Q ne contient point le facteur $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, si on divise le numérateur de P par la fonction Q, le résultat que je représenterai par π, devra être de la forme $\pi=X(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n$, et s'évanouir par conséquent ainsi que ses différentielles, depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, lorsqu'on fera $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$; dans cette hypothèse, on aura les équations

$$\pi=0,\quad d\pi=0,\quad d^2\pi=0,\ldots d^{n-1}\pi=0,$$

chacune desquelles deviendra double, lorsqu'on mettra pour x les valeurs dont il est susceptible en vertu de l'équation $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$: en égalant séparément à zéro, la partie réelle et la partie imaginaire, on obtiendra un nombre suffisant d'équations, pour déterminer A, B, A_1, B_1, etc.

Il faut encore remarquer que de

$$V=Q(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n,$$

on tirera

$$Q=\frac{d^nV}{d^n.(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n},$$

lorsqu'on supposera

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0.$$

On trouvera dQ, d^2Q, etc. dans la même hypothèse, en prenant les différentielles des ordres $n+1$, $n+2$, etc. de l'équation

$$V=Q(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n,$$

et supprimant ensuite les termes que cette hypothèse rend nuls.

159. Je vais donner maintenant quelques applications de ce qui précède. Soit la fraction $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$, les facteurs de son dénominateur sont faciles à découvrir ; car il peut se mettre sous la forme

$$x^3(x^5+x^4-x-1)=x^3(x+1)(x^4-1).$$

Le facteur x^4-1, se décompose en x^2-1 et x^2+1, ou $x-1$, $x+1$ et x^2+1 : on a donc

$$x^8+x^7-x^4-x^3=x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1),$$

et par conséquent la fraction proposée est décomposable comme il suit (151, 152, 153)

$$\frac{A\,dx}{x-1}+\frac{B\,dx}{(x+1)^2}+\frac{C\,dx}{x+1}$$
$$+\frac{D\,dx}{x^3}+\frac{E\,dx}{x^2}+\frac{F\,dx}{x}+\frac{(Gx+H)\,dx}{1+x^2}$$

En réduisant au même dénominateur, et comparant le résultat avec $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$, on détermineroit les numérateurs inconnus; mais je vais faire usage des procédés indiqués précédemment.

Considérant d'abord le facteur $x-1$, qui étant égalé à zéro, donne $x=1$, les quantités $U=1$, et $\frac{dV}{dx}=\frac{d.(x^8+x^7-x^4-x^3)}{dx}$, deviennent 1 et 8; on a donc (155) $A=\frac{1}{8}$. Donc la première fraction partielle est $\frac{1}{8}.\frac{1}{x-1}$.

Pour avoir celles qui ont pour dénominateur $(x+1)^2$ et $x+1$. Je me sers de la règle du n°. 156; et ayant trouvé immédiatement que

$$Q=\frac{x^8+x^7-x^4-x^3}{(x+1)^2}=x^6-x^5+x^4-x^3,$$

j'ai, en faisant $x+1=0$, $x=-1$, d'où $q=4$, et $\frac{u}{q}=\frac{1}{4}$, ainsi la seconde fraction partielle est $\frac{1}{4}.(x+1)^2$.

Mettant dans l'expression U_1, du n°. cité, au lieu de A sa valeur $\frac{1}{4}$, j'ai

$$U_1=\frac{U-AQ}{x+1}=\frac{4-x^8+x^5-x^4+x^3}{4(x+1)}$$
$$=\frac{-x^5+2x^4-3x^3+4x^2-4x+4}{4},$$

d'où il vient $\frac{u_1}{q}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$; on a donc pour la troisième fraction partielle $\frac{9}{8}\frac{1}{x+1}$.

On auroit pu déduire ce résultat de la formule $A_1=\frac{1}{dx}\,d.\frac{U}{Q}$; car on a

$$\frac{U}{Q}=\frac{1}{x^6-x^5+x^4-x^3}$$

et $\frac{1}{dx}\,d.\frac{U}{Q}=-\frac{6x^5-5x^4+4x^3-3x^2}{(x^6-x^5+x^4-x^3)^2}$,

expression qui se réduit à $\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$, lorsqu'on y fait $x=-1$.

On trouvera tout de suite les fractions partielles qui ont respectivement pour dénominateurs x^3, x^2, x, par les formules

$$A=\frac{U}{Q},\quad A_1=\frac{1}{dx}\,d.\frac{U}{Q},\quad A_2=\frac{1}{1\cdot 2dx^2}\,d^2.\frac{U}{Q},$$

en observant que dans ce cas $Q=x^6+x^4-x-1$, et que les seconds membres des équations ci-dessus se réduisent à -1, $+1$ et -1, lorsqu'on fait $x=0$; on a donc $-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$.

Il ne reste plus à trouver que la fraction partielle qui a pour dénominateur $\frac{1}{x^2+1}$; on pourroit la conclure en retranchant de la proposée toutes les précédentes; mais nous allons y parvenir directement par les formules du n°. 157. On a d'abord $Q=x^6+x^5-x^4-x^3$;

puis le facteur x^2+1, étant égalé à zéro, donne

$x=\pm\sqrt{-1}$, $\alpha=0$, $\beta=1$, d'où on tire

$q\pm q'\sqrt{-1}=-2\pm 2\sqrt{-1}$, $\quad u=1$, et $u'=0$;

les équations qui déterminent A et B, deviennent

$$1+2A+2B=0, \qquad 2A-2B=0,$$

et on trouve par conséquent $A=B=-\frac{1}{4}$.

Voilà donc la fraction proposée $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$ décomposée dans les suivantes

$$\frac{1}{8}\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{9}{8}\frac{dx}{x+1}$$
$$-\frac{dx}{x^3}+\frac{dx}{x^2}-\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\frac{(x+1)dx}{x^2+1}.$$

L'intégration de chacune de celles-ci ne présente aucune difficulté, et on obtiendra pour le résultat

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{8}l(x-1)-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\\ +\frac{9}{8}l(x+1)+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-lx\\ -\frac{1}{8}l(x^2+1)-\frac{1}{4}\text{arc}(\text{tang}=x)+const.\end{array}\right\}.$$

La réunion de tous les termes algébriques produira la fraction $\frac{x-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}$, et celle des termes logarithmiques donnera

$$\tfrac{1}{8}l(x-1)+\tfrac{1}{8}l(x+1)+l(x+1)-\tfrac{1}{8}l(x^2+1)-lx$$
$$=\tfrac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+l\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

On aura donc

$$\int\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}=\frac{3-2x-5x^3}{4x^4(1+x)}+\frac{1}{8}l\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)$$
$$+l\left(\frac{x+1}{x}\right)-\tfrac{1}{4}\text{arc}\,(\text{tang}=x)+const.$$

De l'intégration des fonctions irrationnelles.

160. Les fonctions irrationnelles doivent être regardées comme intégrées, toutes les fois que par quelque transformation on les a rendues rationnelles, ou du moins lorsqu'on les a ramenées à une suite de monomes irrationnels; car alors on peut y appliquer immédiatement les règles précédentes.

Proposons-nous par exemple $\frac{(1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})dx}{1+\sqrt[3]{x}}$: il est évident qu'en faisant $x=z^6$, toutes les extractions indiquées s'effectuent, et on a $\frac{6z^5dz(1+z^3-z^4)}{1+z^3}$; divisant par $1+z^3$, il vient

$$-6\left[z^7dz-z^6dz-z^5dz+z^4dz-z^3dz+dz-\frac{dz}{1+z^3}\right];$$

dont l'intégrale est

$$-6\left[\frac{z^8}{8}-\frac{z^7}{7}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}+z-\text{arc}\,(\text{tang}=z)\right]+const.$$

et remettant pour z la valeur $\sqrt[6]{x}$, on aura

$$-\tfrac{6}{8}x\sqrt[6]{x^2}+\tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,\text{arc}\,(\text{tang}$$
$$=\sqrt[6]{x})+const.$$

161. La première espèce de fonctions irrationnelles dont nous allons nous occuper, est celle qui ne renferme que le radical $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, et qui ne sauroit avoir que l'une ou l'autre des formes $Xdx\sqrt{A+Bx+Cx^2}$ et $\frac{X\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, X étant une fonction rationnelle de x.

Nous ferons d'abord remarquer que l'une de ces formes rentre dans l'autre ; car on peut écrire la première ainsi qu'il suit :

$$Xdx\frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}\times\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{X(A+Bx+Cx^2)\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

et le numérateur du résultat est alors une fonction rationnelle.

Avant d'indiquer les moyens de rendre rationnelle, par rapport à x, l'expression $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, nous mettrons la quantité $A+Bx+Cx^2$, sous la forme

$$C\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x+x^2\right),$$

et faisant, pour abréger

$$C=\gamma^2,\quad \frac{A}{C}=\alpha,\quad \frac{B}{C}=\beta,$$

il en résultera $\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}$.

Cela posé, nous ferons $\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}=x+z$; en élevant au quarré, il viendra $\alpha+\beta x=2xz+z^2$, ce qui

donnera $x=\frac{\alpha-z^2}{2z-\beta}$, d'où

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma(x+z)=\gamma\left(\frac{\alpha-\beta z+z^2}{2z-\beta}\right).$$

$$dx=-\frac{2(\alpha-\beta z+z^2)dz}{(2z-\beta)^2}.$$

Par le moyen de ces valeurs, on changera la différentielle $\frac{X dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$ en une autre de la forme $Z dz$, Z étant une fonction rationnelle de z, et réelle tant que C sera positif; mais si C étoit négatif, γ deviendroit imaginaire et la transformée pourroit le devenir aussi.

Dans ce cas, on auroit $\sqrt{A+Bx-Cx^2}$, et faisant

$$C=\gamma^2, \quad \frac{A}{C}=\alpha \quad \frac{B}{C}=\beta,$$

il viendroit $\gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}$. La quantité $x^2-\beta x-\alpha$, peut toujours se décomposer en facteurs réels du premier degré; représentons-les par $x-a$ et $x-a'$: il est évident que

$$\alpha+\beta x-x^2=-(x^2-\beta x-\alpha)=(x-a)(a'-x).$$

Posons ensuite $\sqrt{(x-a)(a'-x)}=(x-a)z$; en élevant au quarré les deux membres de cette équation, elle deviendra divisible par $x-a$, et nous aurons $a'-x=(x-a)z^2$, d'où nous tirerons

$$x=\frac{az^2+a'}{z^2+1}, \quad (x-a)z=\frac{(a'-a)z}{z^2+1}, \quad dx=\frac{2(a-a')zdz}{(z^2+1)^2},$$

valeurs qui rendront encore rationnelle la différentielle proposée.

162. Prenons d'abord pour exemple la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$; la première des transformations précédentes donnera $\frac{-2\,dz}{\gamma(2z-\beta)}$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{\gamma}l(2z-\beta)+const.$ Remettant pour z sa valeur $-x+\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}$ et pour α, β et γ les quantités qu'ils représentent, il viendra

$$-\frac{1}{\sqrt{C}}l\left[\frac{1}{\sqrt{C}}\left(-\frac{B}{\sqrt{C}}-2x\sqrt{C}+2\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right)\right]+const.$$

résultat auquel on peut donner la forme

$$-\frac{1}{\sqrt{C}}l\left[-\frac{B}{2\sqrt{C}}-x\sqrt{C}+\sqrt{A+Ax+Cx^2}\right]+l\frac{2}{\sqrt{C}}+const.$$

En réunissant les termes constans et en observant que le radical $\sqrt{C}$ est susceptible du signe $\pm$, on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{C}}l\left[+\frac{B}{2\sqrt{C}}+x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right]+const.$$

163. Soit pour second exemple $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}}$; en faisant usage de la dernière transformation du n°. 161; on aura $\frac{-2\,dz}{\gamma(z^2+1)}$ dont l'intégrale est

$$-\frac{2}{\gamma}\text{arc}(\text{tang}=z)+const.$$

Substituant au lieu de z sa valeur $\frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}$, tirée de l'équation $a'-x=(x-a)z^2$,

et mettant $\sqrt{C}$ pour γ, on obtiendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{C}} . arc\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}\right) + const.$$

a et a' étant les racines de l'équation

$$x^2 - \frac{B}{C}x - \frac{A}{C} = 0.$$

Supposons qu'on ait $A=C=1$, et $B=0$; la différentielle proposée devient dans ce cas particulier $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et la formule précédente donne pour son intégrale $-2.arc\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right) + const.$ car a et a' étant alors les racines de $x^2-1=0$, il faut prendre $a=-1$ et $a'=1$, pour ne pas tomber dans l'imaginaire.

Je vais montrer que ce résultat revient à l'arc dont le sinus $= x$, et dont on sait que $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, exprime la différentielle (35); pour cela je rappellerai que (*Trig.* 26)

$$\text{tang}\, 2A = \frac{2\,\text{tang}\, A}{1 - \text{tang}^2 A},$$

d'où il suit que l'arc double de celui qui est indiqué dans la formule précédente, a pour tangente $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, et que par conséquent, il est le complément de l'arc, dont $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ seroit la tangente et s le sinus (*Trig.* 26). Nommant donc s ce dernier, on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s - \frac{\pi}{2} + const.$$

et comprenant l'arc $-\frac{\pi}{2}$ dans la constante arbitraire, il viendra $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s + const.$

J'observerai qu'on peut ramener immédiatement la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = \frac{dx}{\gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}}$, à celle d'un arc de cercle; car en faisant d'abord $x-\frac{\beta}{2}=z$, on aura $\frac{dz}{\gamma\sqrt{\alpha+\frac{1}{4}\beta^2-z^2}}$; posant ensuite $\alpha+\frac{1}{4}\beta^2=g^2$ et $z=gu$, on trouvera $\frac{du}{\gamma\sqrt{1-u^2}}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{\gamma}$. arc $(\sin = u) + const.$

164. L'intégration de la formule $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ peut aussi s'effectuer par le moyen des logarithmes, et conduit alors à des expressions imaginaires du sinus et du cosinus, qui sont très-remarquables.

En comparant cette formule avec $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, on trouve $A=1, B=0, C=-1$, et l'intégrale générale devient (162),

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}) + const.$$

si l'on représente par z l'arc dont $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est la différentielle, on aura donc,

$$z = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}) + const.$$

Mais si l'on veut que cet arc soit nul en même tems que

x, il faut supprimer la constante arbitraire; car, en faisant $x=0$, le second membre se réduit à cette constante, à cause que $l\,1=0$.

Cela posé, en observant que x étant le sinus de l'arc z, $\sqrt{1-x^2}$ en est le cosinus, et que le radical $\sqrt{-1}$ emporte avec lui le double signe $\pm$, on écrira cette équation :

$$\pm z\sqrt{-1}=l(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z)(*).$$

Prenant dans chaque membre, au lieu des logarithmes, les nombres auxquels ils appartiennent, il viendra

$$e^{\pm z\sqrt{-1}}=\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z,$$

équation qui fournit les deux suivantes,

$$e^{z\sqrt{-1}}=\cos z+\sqrt{-1}\sin z.$$
$$e^{-z\sqrt{-1}}=\cos z-\sqrt{-1}\sin z.$$

Si l'on ajoute celles-ci, on en tirera

$$\cos z=\frac{e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}}}{2};$$

(*) L'expression $dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ se change immédiatement en différentielle logarithmique, lorsqu'on multiplie son numérateur et son dénominateur par le facteur $x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}$; il vient par cette opération

$$dt=\frac{\frac{x\,dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}}+dx}{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{dx\sqrt{-1}-\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}}$$

et l'on voit bien alors que le numérateur de la seconde fraction est la différentielle de son dénominateur, en sorte qu'on en conclut comme ci-dessus

$$t\sqrt{-1}=l(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}).$$

et en retranchant la seconde de la première, il en résultera,

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces expressions ne sont au fond que de purs symboles algébriques, qui représentent, sous une forme abrégée, les séries des n°s. 23, 36, ainsi qu'on peut s'en assurer, en mettant pour les exponentielles, $e^{z\sqrt{-1}}$, $e^{-z\sqrt{-1}}$, leurs développemens formés d'après la série du n°. 23; mais ces symboles, quoiqu'on ne puisse leur assigner de valeur sous aucune forme finie, ne s'en prêtent pas moins au calcul avec la plus grande facilité, et manifestent toutes les propriétés dont jouissent les lignes trigonométriques qu'ils représentent.

En mettant nz au lieu de z dans l'équation

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos z \pm \sqrt{-1}\sin z,$$

elle devient

$$e^{\pm nz\sqrt{-1}} = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

Mais on a aussi

$$e^{\pm nz\sqrt{-1}} = (e^{\pm z\sqrt{-1}})^n = (\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n.$$

Donc

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

Cette dernière équation conduit à des conséquences très-importantes, que nous développerons successivement, à mesure que nous en aurons besoin. Ici nous nous arrêterons sur l'usage qu'on en peut faire pour découvrir les facteurs des binomes de la forme $x^n \pm a^n$, parce que cette recherche est nécessaire dans l'intégration des fractions rationnelles de la forme $\frac{x^m dx}{x^n \pm a^n}$.

165. La fonction $x^n \pm a^n$ se transforme en $a^n(y^n \pm 1)$, lorsqu'on fait $x = ay$, et pour en connoître les facteurs, il suffit de résoudre l'équation

$$y^n \pm 1 = 0.$$

L'expression $y = \cos z + \sqrt{-1}\sin z$ satisfait à cette équation par une détermination très-simple de l'arc z: on a $y^n = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz + \sqrt{-1}\sin nz$; et comme, en désignant par π la demi-circonférence, par m un nombre entier quelconque, il viendra

$$\sin m\pi = 0, \qquad \cos m\pi = \pm 1,$$

selon que m sera un nombre pair ou impair, on n'aura qu'à supposer $nz = m\pi$, pour obtenir $y^n = \pm 1$.

Afin de distinguer plus particulièrement le cas où m est pair, et celui où il est impair, nous écrirons pour le premier $2m$ au lieu de m, et pour le second $2m+1$; nous ferons donc

$$nz = 2m\pi, \text{ et } nz = (2m+1)\pi.$$

Dans la première hypothèse il viendra

$$y^n = +1, \quad y = \cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n},$$

et dans la seconde,

$$y^n = -1, \quad y = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}.$$

166. Au moyen du nombre indéterminé m, chacune des expressions de y nous fournit toutes les valeurs dont cette quantité est susceptible; car on peut prendre successivement

$$m = 0, \quad m = 1, \quad m = 2, \quad m = 3, \quad \text{etc.}$$

La

La première formule donnera

$$y = \cos 0 \cdot \pi = 1$$

$$y = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$y = \cos\frac{4\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{4\pi}{n}$$

etc.

et il est visible qu'on trouvera toujours des résultats différens, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à $m = n - 1$; car, en supposant $n = m$, on a $y = \cos 2\pi = 1$, et on retombe sur la première des valeurs déjà obtenues, puis, en prenant $m = n + 1$, il vient

$$\cos\frac{(2n+2)\pi}{n} = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\pi}{n} \text{ (trig 22)}$$

$$\sin\frac{(2n+2)\pi}{n} = \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{n}\right) = \sin\frac{2\pi}{n} :$$

ce qui ramène à la seconde valeur, et ainsi des autres.

Non seulement on trouvera, par ce procédé, précisément les n racines de l'équation $y^n = 1$, ou $y^n - 1 = 0$, mais on reconnoîtra, avec un peu d'attention, que ces racines peuvent s'arranger par couples, en réunissant celles qui ne diffèrent que par le signe du radical $\sqrt{-1}$; car puisque

$$\cos(2\pi - p) = \cos p \quad \text{et} \quad \sin(2\pi - p) = -\sin p,$$

il en résulte que l'on a

$$y = \cos\frac{(2n-2m)\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2n-2m)\pi}{n}$$

$$= \cos\frac{2m\pi}{n} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n}.$$

Il suit de là qu'on peut renfermer toutes les racines de

l'équation $y^n - 1 = 0$, dans la seule expression

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n},$$

en se bornant à donner à m les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \frac{n}{2},$$

si n est paire; et les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \frac{n-1}{2},$$

si n est impaire; et il faut observer que, dans le premier cas, la dernière valeur de y est

$$y = \cos\pi = -1,$$

parce qu'alors l'équation $y^n - 1 = 0$ a deux racines réelles.

Les deux valeurs comprises dans la formule

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n}$$

donnent pour facteurs du premier degré de la quantité $y^n - 1$, les deux expressions imaginaires

$$y - \left(\cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n}\right)$$

$$y - \left(\cos\frac{2m\pi}{n} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n}\right);$$

et en les multipliant, on obtient l'expression

$$y^2 - 2y\cos\frac{2m\pi}{n} + 1,$$

qui comprend tous les facteurs réels du second degré.

Voici pour servir d'exemple de la formule

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{n},$$

le tableau des facteurs du premier degré contenus dans la fonction $y^6 - 1$

$$y - 1$$
$$y - \left(\cos\frac{2\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{6}\right)$$
$$y - \left(\cos\frac{4\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{6}\right)$$
$$y + 1$$

La formule

$$y^2 - 2y\cos\frac{2m\pi}{n} + 1$$

donne les facteurs du second degré

$$y^2 - 2y + 1$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{2\pi}{6} + 1$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{4\pi}{6} + 1$$
$$y^2 + 2y + 1.$$

Le premier et le dernier des facteurs du second degré sont les quarrés des facteurs du premier degré $y - 1$ et $y + 1$, qui n'entrent qu'une fois dans la proposée : il faudra donc, lorsqu'on employera les facteurs du second degré, remplacer le premier et le dernier par

$$(y - 1)(y + 1) \text{ ou } y^2 - 1.$$

On a pour la fonction $y^5 - 1$ les facteurs du premier degré

$$y - 1$$
$$y - \left(\cos\frac{2\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$y - \left(\cos\frac{4\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}\right).$$

Ceux du second degré sont

$$y^2 - 2y + 1$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{2\pi}{5} + 1$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{4\pi}{5} + 1;$$

mais il faut observer que le premier facteur du second degré est le quarré du facteur $y - 1$, qui n'entre qu'une fois dans la fonction proposée.

167. Lorsque la fonction à décomposer en facteurs est $y^n + 1$, la formule

$$y = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

qui répond à ce cas (165), est aussi susceptible du double signe $\pm$, pourvu qu'on s'arrête à la valeur de m, qui donne

$$2m + 1 = n \qquad \text{ou } 2m + 1 = n - 1,$$

selon que n est impaire ou paire. Il résulte de là

$$m = \frac{n-1}{2}, \qquad m = \frac{n-2}{2};$$

les facteurs du premier degré sont

$$y - \left(\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}\right),$$

et ceux du second

$$y^2 - 2y\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + 1.$$

Lorsque parmi ces derniers, il s'en trouvera qui seront

des quarrés, il ne faudra prendre qu'un seul de leurs facteurs simples. C'est ce qu'on verra par les exemples ci-dessous.

Lorsqu'on a y^5+1, les facteurs du premier degré sont

$$y-\left(\cos\frac{\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$y-\left(\cos\frac{3\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$y+1,$$

et ceux du second

$$y^2-2y\cos\frac{\pi}{5}+1$$

$$y^2-2y\cos\frac{3\pi}{5}+1$$

$$y^2+2y+1.$$

La fonction y^6+1 a pour facteurs du premier degré

$$y-\left(\cos\frac{\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$y-\left(\cos\frac{3\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{6}\right)\text{ ou }y\mp\sqrt{-1}$$

$$y-\left(\cos\frac{5\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

et pour facteurs du second,

$$y^2-2y\cos\frac{\pi}{6}+1$$

$$y^2-2y\cos\frac{3\pi}{6}+1\text{ ou }y^2+1$$

$$y^2-2y\cos\frac{5\pi}{6}+1.$$

168. Les fonctions de la forme $x^{2n} + 2px^n + q$ peuvent être traitées comme celles qui ne renferment que deux termes. En les résolvant à la manière des équations du second degré, on en tirera les facteurs

$$x^n + (p \pm \sqrt{p^2 - q});$$

tant que p^2 surpassera q, le second terme de ces facteurs sera réel, et en faisant

$$\pm a^n = p \pm \sqrt{p^2 - q},$$

on aura des fonctions de la forme

$$x^n \pm a^n$$

à décomposer en facteurs.

Lorsqu'on aura $p^2 < q$, on fera $p = a^n$, $q = b^{2n}$, $x = by$, et il viendra

$$b^{2n} y^{2n} + 2a^n b^n y^n + b^{2n} = b^{2n} \left(y^{2n} + \frac{2a^n}{b^n} y^n + 1\right);$$

mais la condition $p^2 < q$ ou $a^{2n} < b^{2n}$ donnant $a < b^n$, la quantité $\frac{a^n}{b^n}$ sera une fraction, et p pourra être représentée par le cosinus d'un arc donné δ : la fonction proposée reviendra donc à

$$b^{2n} (y^{2n} + 2y^n \cos\delta + 1),$$

et il ne s'agira plus que de résoudre l'équation

$$y^{2n} + 2y^n \cos\delta + 1 = 0.$$

On en tire d'abord

$$y^n = -\cos\delta \pm \sqrt{-1} \sin\delta;$$

puis prenant

$$y = \cos z \pm \sqrt{-1} \sin z,$$

il vient (164)

$$y^n = \cos nz \pm \sqrt{-1} \sin nz :$$

et en comparant avec l'autre valeur de y^n, on obtient

$$\cos nz = \cos \delta, \qquad \sin nz = \sin \delta.$$

On satisfait en général à ces relations, en supposant $nz = 2m + \delta$, m étant un nombre entier quelconque, puisque

$$\cos(2m\pi + \delta) = \cos\delta, \qquad \sin(2m\pi + \delta) = \sin\delta;$$

on aura donc

$$z = \frac{2m\pi + \delta}{n}, \quad y = \cos\frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi + \delta}{n}$$

les facteurs du premier degré de la fonction

$$y^{2n} + 2y^n \cos\delta + 1$$

seront par conséquent compris dans la formule

$$y = \left\{\cos\frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi + \delta}{n}\right\}.$$

Rien ne changeroit dans tout ce qui précède, si le coefficient de la fonction proposée étoit négatif. Il faudroit seulement faire $p = -a^n$, et prendre l'arc δ plus grand que 1^r (*).

De l'intégration des différentielles binomes.

169. Ces différentielles sont comprises dans la formule

$$x^{m-1}\,dx\,(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

(*) Les formules des nos. 166, 167, 168, contiennent implicitement les théorèmes de *Côtes* et de *Moivre*, et remplacent avec avantage ces théorèmes, qui ne sont plus maintenant qu'un objet de pure curiosité; je n'ai pas cru par cette raison devoir les insérer ici, on les trouve dans le *Traité du Calcul différ. et du Calcul intégral.*

170. Puisqu'il n'est pas possible d'intégrer en général la formule $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, l'idée qui se présente d'abord, est de chercher à la réduire aux cas les plus simples qu'elle peut renfermer, comme nous l'avons fait n°. 154, à l'égard de $\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^q}$ que nous avons ramenée à $\int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$. On y parviendra par la remarque du n°. 148, en vertu de laquelle on a $\int u\,dv = uv - \int v\,du$; car, si on décompose la quantité $x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en deux facteurs, dont l'un pouvant s'intégrer, soit représenté par dv, et l'autre par u, on fera dépendre l'intégration de la formule proposée de celle de $\int v\,du$ qui, dans certains cas, sera plus simple que la proposée, ainsi qu'on va le voir.

Pour abréger un peu les résultats, nous écrirons p au lieu de $\frac{p}{q}$, et il faudra supposer que p est un nombre fractionnaire quelconque; nous aurons alors la formule

$$x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p.$$

Parmi les diverses manières de décomposer cette différentielle en facteurs, je choisis celle qui tend à diminuer l'exposant de x hors de la parenthèse, et qui s'opère en écrivant ainsi,

$$\int x^{m-n}.x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$$

la formule proposée; par ce moyen, le facteur $x^{n-1}\,dx(a+bx^n)^p$ est intégrable, quel que soit p (149): en le représentant par dv, on a

$$v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}, \text{ et } u = x^{m-n};$$

d'où il résulte

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n}{(p+1)nb}\int x^{m-n-1}\,dx(a+bx^n)^{p+1}$$

or

$$\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{p+1} = \int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p\,(a+bx^n) = a\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p + b\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p;$$

mettant cette dernière valeur dans l'équation précédente, et rassemblant les termes affectés de l'intégrale $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$, il vient

$$\left(1+\frac{m-n}{(p+1)n}\right)\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}\,(a+bx^n)^{p+1} - a\,(m-n)\int x^{m-n-1}\,dx(a+bx^n)^p}{(p+1)nb}$$

d'où on tire (A)..... $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}\,(a+bx^n)^{p+1} - a\,(m-n)\int x^{m-n-1}\,dx(a+bx^n)^p}{b(pn+m)}$

Il est aisé de voir que puisqu'on peut ramener, par cette formule, l'intégration de $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$ à celle de $\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$, on ramènera aussi cette dernière à celle de $\int x^{m-2n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$, en écrivant $m-n$ à la place de m dans l'équation (A); puis, changeant encore m en $m-2n$ dans cette même équation, elle fera connoître $\int x^{m-2n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$ au moyen de $\int x^{m-3n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$, et ainsi de suite.

En général, si r désigne le nombre de réductions effectuées, on parviendra à $\int x^{m-rn-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$, et la dernière formule sera

$$\int x^{m-(r-1)n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-rn}(a+bx^n)^p - a\,(m-rn)\int x^{m-rn-1}\,dx\,(a+bx^n)^p}{b(pn+m-(r-1)n)}$$

Il est évident, par cette dernière formule, que si m

est un multiple de n, l'intégration de la formule $\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^p$ s'effectuera algébriquement, puisque l'anéantissement du coefficient $m-rn$ qui aura nécessairement lieu, fera disparoître la dernière intégrale $\int x^{m-rn}\,dx\,(a+bx^n)^p$. Ce résultat s'accorde avec celui du n°. 169.

171. On peut obtenir aussi une réduction par laquelle l'exposant de la parenthèse soit diminué de l'unité; pour cela il suffit d'observer que

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)$$
$$= a\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1} + b\int x^{m+n-1}\,dx(a+bx^n)^{p-1}$$

et que la formule (A), en y changeant m en $m+n$, et p en $p-1$, donne

$$\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{p-1} =$$
$$\frac{x^m(a+bx^n)^p - am\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{p-1}}{b(pn+m)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura (B). . . . . $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p =$

$$\frac{x^m(a+bx^n)^p + pna\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{p-1}}{(pn+m)}.$$

Avec la formule (B), on ôtera successivement du nombre p toutes les unités qu'il peut contenir; et par le moyen de cette formule et de la formule (A), on fera dépendre l'intégrale

$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$ de $\int x^{m-rn-1}\,dx\,(a+bx^n)^{p-s}$,

rn étant le plus grand multiple de r contenu dans $m-1$, et s le plus grand nombre entier contenu dans p.

L'intégrale $\int x\,dx^7\,(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}$, par exemple, sera ra-

menée successivement par la formule (*A*)

à $\int x^4 \,\mathrm{d}x\,(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}$, $\int x\,\mathrm{d}x\,(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}$;

et la formule (*B*) fera dépendre $\int x\,\mathrm{d}x\,(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}$

de $\int x\,\mathrm{d}x\,(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}$ et de $\int x\,\mathrm{d}x\,(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}$.

172. Il est évident que si m et n étoient négatives, les formules (*A*) et (*B*) ne rempliroient pas le but pour lequel elles ont été construites : elles augmenteroient alors les exposans de x hors de la parenthèse, et celui de la parenthèse; mais en les renversant, on en trouve qui s'appliquent aux cas dont il s'agit.

On tire de (*A*)

$$\int x^{m-n-1}\,\mathrm{d}x\,(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - b(m+np)\int x^{m-1}\,\mathrm{d}x\,(a+bx^n)^p}{a(m-n)}$$

et mettant $m+n$ au lieu de m, il vient (*C*)

$$\int x^{m-1}\,\mathrm{d}x\,(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^{p+1} - b(m+n+np)\int x^{m+n-1}\,\mathrm{d}x\,(a+bx^n)^p}{am},$$

formule qui diminue les exposans hors la parenthèse, puisque $m+n-1$ devient $-m+n-1$, quand on a mis $-m$ à la place de m.

Pour renverser la formule (*B*), on prend

$$\int x^{m-1}\,\mathrm{d}x\,(a+bx^n)^{p-1} = -\frac{x^m(a+bx^n)^p - (m+np)\int x^{m-1}\,\mathrm{d}x\,(a+bx^n)^p}{pna};$$

Puis on écrit $p+1$ au lieu de p, et il vient (*D*)

$$\int x^{m-1}\,\mathrm{d}x\,(a+bx^n)^p = -\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1} - (m+n+np)\int x^{m-1}\,\mathrm{d}x\,(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)na}.$$

Cette formule atteint le but proposé, puisque $p+1$ se change en $-p+1$, lorsque p est négatif.

Les formules (A), (B), (C), (D), deviennent illusoires, lorsque leur dénominateur s'évanouit. Cela arrive pour la formule (A), par exemple, quand $m=-np$: mais dans tous les cas de cette espèce, la fonction proposée est intégrable soit algébriquement, soit par logarithmes.

173. Soit la formule $\int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, m étant un nombre entier positif; on trouve par la formule (A), en y faisant $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$,

$$\int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{m-3}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}};$$

écrivons m au lieu de $m-1$ et nous aurons

$$\int \frac{x^m\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donnons successivement à m différentes valeurs, en commençant pour les nombres impairs; nous aurons

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + const.$$

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^7\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{7}x^6\sqrt{1-x^2} + \frac{6}{7}\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

On tirera de là

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + const.$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1.2}{1.3}\right)\sqrt{1-x^2} + const.$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{1.4}{3.5}x^2 + \frac{1.2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{1-x^2} + const.$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{7}x^6 + \frac{1.6}{3.7}x^4 + \frac{1.4.6}{3.5.7}x^2 + \frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}\right)\sqrt{1-x^2} + const.$$

etc.

la loi de ces valeurs est évidente.

Passons maintenant aux valeurs paires de m. En supposant $m=2$, $m=4$, $m=6$, etc. on trouve

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6}x^5\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{6}\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

dans ce cas toutes les intégrales proposées dépendront de

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}(\sin = x) + const. \quad (35)$$

et en représentant par A l'arc indiqué, on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = A + const.$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} A + const.$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4} A. + const.$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{6}x^5 + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} A + const.$$

etc.

174. Cherchons maintenant les formules qui répondent aux cas où m est négative. On a alors par la formule (C) (172)

$$\int \frac{x^{-m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{-m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

en écrivant $-m$, au lieu de $-m-1$, il vient

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}.$$

On ne peut pas supposer $m=1$, puisque cette valeur rend le dénominateur nul; il faut donc chercher *à priori* l'intégrale de $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. On la trouvera facilement d'après ce qui a été dit n°. 161; mais on peut y parvenir aussi de la manière suivante: on fera $1-x^2=z^2$; d'où il résultera

$$x = \sqrt{1-z^2}, \qquad dx = \frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

et

et par conséquent

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{-dz}{1-z^2},$$

équation dont le second membre a pour intégrale

$$-\tfrac{1}{2}l(1+z)+\tfrac{1}{2}l(1-z)=-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{1-z}\right);$$

remettant au lieu de z sa valeur, on aura

$$-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right);$$

multipliant par $1+\sqrt{1-x^2}$, les deux termes de la fraction comprise sous le signe l, on obtiendra

$$-\tfrac{1}{2}l\left[\frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{x^2}\right]=-\tfrac{1}{2}l\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2\right]$$
$$=-l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right);$$

on aura donc enfin

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+\textit{const.}$$

En posant $m=3$, $m=5$, etc. il viendra

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x}}{4x^4}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x}}{6x^6}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

Faisant ensuite $m=2$, $m=4$, $m=6$, etc. on trouvera

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + const.$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

De ces deux suites d'équations on tirera, comme dans le n°. précédent, une suite de formules intégrées par logarithmes, et une autre suite qui sera algébrique.

De l'intégration par les séries.

175. L'intégrale $\int X\,dx$ s'obtient facilement lorsqu'on a développé la fonction X en série, parce qu'on n'a plus à intégrer que des monomes auxquels s'applique immédiatement la règle du n°. 46. En effet, soit $X = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{etc.}$ si on multiplie les deux membres de cette équation par dx, et qu'on intègre séparément chaque terme du second, il viendra

$$\int X dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{etc.} + const.$$

Lorsqu'on rencontrera dans le développement de x un terme de la forme $\frac{A}{x}$, il en résultera dans l'intégrale, le terme $A\,lx$ (147).

176. La fonction la plus simple qu'on puisse réduire en série, est $\frac{1}{a+x}$, et il en résulte

$$\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\text{etc.};$$

d'où

$$\int\frac{dx}{a+x}=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{etc.}+const.$$

mais on sait d'ailleurs que $\int\frac{dx}{a+x}=l(a+x)$: on aura donc

$$l(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{etc.}+const.$$

Pour trouver ce qu'exprime la constante, il n'y a qu'à faire $x=0$; on aura dans cette supposition $la=const.$ et par conséquent,

$$l(a+x)-la=l\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{etc.}$$

résultat conforme à celui du n° 29.

177. Soit la différentielle $\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$, qui peut se mettre sous la forme $\frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}$, et qui appartient par conséquent à l'arc dont la tangente $=\frac{x}{a}$: en réduisant $\frac{a}{a^2+x^2}$ en série, il viendra

$$\frac{a}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}+\text{etc.};$$

intégrant chaque terme en particulier, on aura

$$\int \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right) + const. =$$
$$\frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{etc.} + const.$$

Si on veut tirer de cette équation la valeur du plus petit des arcs dont la tangente est $\frac{x}{a}$, il faudra supprimer la constante arbitraire, puisque l'arc cherché est nul, lorsque $x = 0$, et on aura

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{etc.}$$

résultat conforme à celui du n° 37, mais ici la loi est évidente.

En opérant de même sur $\frac{x^m\,dx}{a^n+x^n}$, on trouve

$$\int \frac{x^m\,dx}{a^n+x^n} = \frac{x^m+1}{(m+1)a^n} - \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}}$$
$$+ \frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}} - \text{etc.} + const.$$

On pourroit aussi développer $\frac{1}{a^n+x^n}$, suivant les puissances négatives de x, on auroit dans ce cas

$$\frac{1}{x^n+a^n} = \frac{1}{x^n} - \frac{a^n}{x^{2n}} + \frac{a^{2n}}{x^{3n}} - \frac{a^{3n}}{x^{4n}} + \text{etc.}$$

et il viendroit après avoir multiplié par $x^m\,dx$, et intégré

$$\int \frac{x^m\,dx}{x^n+a^n} = -\frac{1}{(n-m-1)x^{n-m-1}}$$
$$+ \frac{a^n}{(2n-m-1)x^{2n-m-1}} - \frac{a^{2n}}{(3n-m-1)x^{3n-m-1}}$$
$$+ \text{etc.} + const.$$

Cette dernière série sera convergente lorsque x surpassera la quantité a, et qu'on aura en même tems $m < n$ et $n > 1$; mais il faudra de plus, pour qu'elle ne renferme que des termes algébriques, qu'aucun des diviseurs, compris tous dans la forme $i\,n - m - 1$, ne devienne nul. Cette circonstance auroit lieu nécessairement si $m + 1$ étoit un multiple de n, et dans ce cas, la différentielle développée contiendroit un terme de la forme $a^{(i-1)n}\frac{dx}{x}$ dont l'intégrale seroit $a^{(i-1)n}\,1\,x$.

Si on fait dans le résultat ci-dessus $m=0$, $n=2$ et $a=1$, il devient

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

mais quoique l'expression $\frac{dx}{1+x^2}$, soit la différentielle de l'arc dont la tangente est x, il n'en faut pas conclure que la série que nous venons d'obtenir, soit le développement de cet arc, puisqu'elle devient infinie lorsque $x=0$. La considération de la constante arbitraire levera cette difficulté, si l'on fait attention que pour connoître la vraie valeur d'une série, il faut toujours partir du cas où elle est convergente. Or la série

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.}$$

l'est d'autant plus, que x est plus grand, et elle s'évanouit lorsque x est infini; l'équation

$$\text{arc}(\text{tang}=x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

se changera dans cette limite en arc de $1^r. = \frac{\pi}{2} = \textit{const.}$

substituant cette valeur de la constante, on aura

$$\text{arc}\,(\text{tang}=x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{etc.}$$

On pourroit intégrer aussi la fraction rationnelle $\frac{U\,dx}{V}$ (151), en développant en série l'expression $\frac{U}{V}$; mais ce moyen ne conduiroit qu'à des résultats fort compliqués et rarement convergens : d'ailleurs ces calculs sont à peu près inutiles, puisqu'on sait ramener cette différentielle aux logarithmes et aux arcs de cercles, faciles à évaluer par les tables qu'on en a.

178. La formule $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ est facile à intégrer par le développement de la quantité $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en série, et il vient pour résultat

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{x^m}{m}+\frac{p}{q}\frac{b}{a}\frac{x^{m+n}}{m+n}\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-q)}{1.2q^2}\frac{b^2}{a^2}\frac{x^{m+2n}}{m+2n}+\frac{p(p-q)(p-2q)}{1.2.3q^3}\frac{b^3}{a^3}\frac{x^{m+3n}}{m+3n}+\text{etc.}\right\}$$
$$+\text{const.}$$

Si on vouloit avoir une série descendante par rapport à x, il faudroit donner à la différentielle proposée la forme $x^{m+\frac{np}{q}-1}\,dx\,(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, et on trouveroit, après avoir développé $(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, multiplié le résultat par $x^{m+\frac{np}{q}-1}\,dx$ et intégré, ...

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=b^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{qx^{m+\frac{pn}{q}}}{mq+np}\right.$$
$$\left.-\frac{p}{q}\frac{a}{b}\frac{qx^{m+\frac{(p-q)n}{q}}}{mq+(p-q)n}+\frac{p(p-q)}{1.2.q^2}\frac{a^2}{b^2}\frac{qx^{m+\frac{(p-2q)n}{q}}}{mq+(p-2q)n}-\text{etc.}\right\}$$
$$+\text{const.}$$

Tant que les quantités a et b seront positives toutes deux, ou que q sera un nombre impair, on pourra se servir indifféremment de cette série ou de la précédente; mais lorsque q sera pair, la première formule deviendra imaginaire par le facteur $\frac{P}{a^q}$ si a^p est négatif, et la même chose arrivera à la seconde, si b^p est négatif.

179. Soit $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, expression qui est la différentielle de l'arc dont le sinus $= x$; on aura

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \text{etc.}$$

et de là,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \text{etc.} + const.$$

En supprimant la constante, la série s'anéantira, lorsque $x = 0$; elle donnera par conséquent la valeur du plus petit des arcs dont le sinus $= x$, comme dans le n°. 37.

Voici encore quelques résultats faciles à obtenir d'après ce qui précède, mais qu'il est bon de connoître.

1°. $\frac{dx}{\sqrt{x-xx}} = \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x}}$; faisant $\sqrt{x} = u$, on a

$\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$, mais par la série précédente il vient

$$\int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\left(u + \frac{1}{2}\frac{u^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{u^5}{5} + \frac{2.4.6}{1.3.5}\frac{u^7}{7} + \text{etc.}\right) + const.$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-xx}} = 2\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^4}{7}+\text{etc.}\right)\sqrt{x}+\text{const.}$$

2°. $dx\sqrt{2ax-x^2} = (2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$;

or

$$\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{x}{2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{8a^3}-\text{etc.}$$

donc

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2} = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{5.2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{7.4a}\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{9.8a^3}-\text{etc.}\right)\sqrt{2a}+\text{const.},$$

$$\text{ou } \int dx\sqrt{2ax-x^2} = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{x}{5.2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{7.4a^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{9.8a^3}-\text{etc.}\right)2x\sqrt{2ax}+\text{const.}$$

3°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ donne après la réduction de $\sqrt{1+x^2}$ en série et l'intégration,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\text{etc.}$$

$$+\text{const.}$$

4°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = lx-\frac{1}{1.2x^2}-\frac{1.3}{2.4.4x^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6.6x^6}$$

$$-\text{etc.}+\text{const.}$$

Cette série qui renferme la transcendante lx est d'autant plus convergente que x est grand; on peut en obtenir une autre entièrement algébrique, et d'autant

plus convergente que x diffère moins de l'unité. Pour cela il faut faire $x = 1 + u$, ce qui donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int u^{-\frac{1}{2}} du \left(1 + \frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

développant $\left(1 + \frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, multipliant chaque terme par $u^{-\frac{1}{2}} du$ et intégrant, on trouve

$$\int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3.2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7.8} + \text{etc.} + const.\right.$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{u}{3.2} + \frac{1.3.u^2}{2.4.5.4} - \frac{1.3.5.u^3}{2.4.6.7.8} + \text{etc.}\right)\sqrt{2u} + const.$$

et puisque $u = x - 1$, les termes de cette série sont d'autant plus petits que $x - 1$ est peu considérable.

Il est important d'avoir ainsi plusieurs séries pour exprimer la même intégrale, afin de choisir celle qui se trouve convergente pour la valeur particulière qu'on se propose de donner à x.

180. Le but de la réduction des différentielles en série est de les transformer dans une suite de termes dont chacun soit intégrable en particulier, et il n'est pas nécessaire pour cela que les termes soient des monomes.

Si on a par exemple

$$\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

et que e soit une quantité fort petite, on peut dévelop-

par $\sqrt{1-e^2x^2}$ dans une série très-convergente, parce que dans la différentielle proposée x^2 est toujours <1 à cause du radical $\sqrt{1-x^2}$; on trouve

$$\sqrt{1-e^2x^2}=1-\frac{1}{2}e^2x^2-\frac{1.1}{2.4}e^4x^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6-\text{etc.}$$

et il vient à intégrer la suite

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1}{2}e^2x^2-\frac{1.1}{2.4}e^4x^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6-\text{etc.}\right)$$

dont chaque terme rentre dans la formule $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, traitée n°s. 173, 174. En substituant au lieu de

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{etc.}$$

les expressions données dans le n°. 173, il en résultera

$$\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=A$$

$$+\frac{1}{2}e^2\left\{\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-A\right\}$$

$$+\frac{1.1}{2.4}e^4\left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1.3}{1.4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1.3}{2.4}A\right\}$$

$$+\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\left\{\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1.3}{4.6}x^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}A\right\}$$

$$+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\textit{const.}$$

On traiteroit d'une manière analogue la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a+x)}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+x}}:$$

on réduiroit en série la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{a+x}} = (a+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il est bon de remarquer que la formule

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(2mu-u^2)(n-u)}},$$

qui se rencontre dans quelques applications à la mécanique, se ramène à

$$\frac{-1}{\sqrt{m}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(a+x)}},$$

en faisant

$$m-u=mx \text{ et } \frac{n-m}{m}=a.$$

De l'intégration des quantités logarithmiques et exponentielles.

181. Soit d'abord la formule $\int P\,\mathrm{d}x\,(\mathrm{l}x)^n$, P étant une fonction algébrique de x; en y appliquant la réduction que donne la formule $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$, et faisant pour abréger $\int P\,\mathrm{d}x = N$, il vient

$$\int P\,\mathrm{d}x\,(\mathrm{l}x)^n = N(\mathrm{l}x)^n - n\int\frac{\mathrm{d}x}{x}(\mathrm{l}x)^{n-1}N;$$

si on désigne $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}N$ par M, on aura de la même manière

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}N(\mathrm{l}x)^{n-1} = M(\mathrm{l}x)^{n-1} - (n-1)\int\frac{\mathrm{d}x}{x}(\mathrm{l}x)^{n-2}M.$$

Par une suite de réductions semblables on obtiendra...

$$\int P\mathrm{d}x\,(\mathrm{l}x)^n = N(\mathrm{l}x)^n - nM(\mathrm{l}x)^{n-1} + n(n-1)L(\mathrm{l}x)^{n-2} - n(n-1)(n-2)K(\mathrm{l}x)^{n-3} + \text{etc.}$$

et par conséquent l'intégrale proposée sera algébrique dans le cas où n sera un nombre entier, et où les quantités N, M, L, K, etc. seront toutes des fonctions algébriques; c'est ce que les exemples suivans vont éclaircir.

182. La différentielle $x^m \, dx \, (lx)$ donne

$$\int P \, dx = \int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} = N$$

$$\int \frac{dx}{x} (lx)^{n-1} N = \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \frac{dx}{x} (lx)^n = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{n+1}};$$

d'où

$$\int x^m \, dx \, (lx) = x^{m+1} \left(\frac{lx}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) + const.$$

Pour la différentielle $x^m \, dx \, (lx)^2$, on a

$$\int P \, dx = N = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \int N \frac{dx}{x} = M = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2},$$

$$\int M \frac{dx}{x} = L = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3},$$

d'où

$$\int x^m \, dx \, (lx)^2 = x^{m+1} \left(\frac{(lx)^2}{m+1} - \frac{2 \, lx}{(m+1)^2} + \frac{1 \cdot 2}{(m+1)^3} \right) + const.$$

En suivant ainsi cette marche, on construira la formule générale suivante.

$$\int x^m \, dx \, (lx)^n = x^{m+1} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(lx)^n}{m+1} - \dfrac{n(lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + \dfrac{n(n-1)(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} \\ - \dfrac{n(n-1)(n-2)(lx)^{n-3}}{(m+1)^4} + \text{etc.} \end{array} \right\} + const.$$

Il est visible que cette série se terminera toutes les fois que n sera un nombre entier positif.

Lorsque $m = -1$, on a

$$\int \frac{dx}{x} (lx)^n = \frac{1}{n+1} (lx)^{n+1} + const.$$

En général, la différentielle $\frac{dx}{x}U$, dans laquelle U désigneroit une fonction algébrique de lx, deviendroit intégrable en faisant $lx = u$.

Lorsque n est négatif ou fractionnaire, la série se prolonge à l'infini; en faisant $n = -\frac{1}{2}$, par exemple, il vient

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{lx}} =$$

$$x^{m+1}\left\{\frac{1}{(m+1)(lx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(m+1)^2(lx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{4(m+1)^3(lx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.5}{8(m+1)^4(lx)^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.} + \right\} const.$$

183. Au lieu de se servir de la formule du n°. préc. dans laquelle l'exposant de lx augmente sans cesse, lorsque n est négatif, on peut, en opérant comme on va le voir, ramener l'intégration de la formule $\int P\,dx\,(lx)^{-n}$ à une autre de la forme $\int V dx (lx)^{-1}$, si n est un nombre entier, ou au moins de la forme $\int V dx (lx)^{-n+m}$, m étant le plus grand nombre entier contenu dans n.

La différentielle $P\,dx\,(lx)^{-n}$ peut être mise sous la forme $Px.\frac{dx}{x}(lx)^{-n}$; mais le facteur $\frac{dx}{x}(lx)^{-n}$ ayant pour intégrale $\frac{-1}{(n-1)(lx)^{n-1}}$, il viendra

$$\int Px.\frac{dx}{x(lx)^n} = -\frac{Px}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{(lx)^{n-1}}\,d(P\omega).$$

Si on fait successivement

$d(Px)=Q\,dx$, $d(Qx)=R\,dx$, $d(Rx)=S\,dx$, etc.

on aura, en poursuivant la réduction ci-dessus,

$$\int\frac{P\,dx}{(lx)^n}=-\frac{Px}{(n-1)(lx)^{n-1}}-\frac{Qx}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}$$
$$-\frac{Rx}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}}-\text{etc.}$$

cette suite étant poussée jusqu'à ce qu'on rencontre un terme $+\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots.1}\int\frac{V\,dx}{lx}$, si n est un nombre entier, ou un terme

$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1)}\int\frac{V\,dx}{(lx)^{n-m}},$$

m étant le plus grand nombre entier contenu dans n.

La formule $\int\frac{V\,dx}{lx}$ paroît devoir constituer une transcendante différente de celles que nous avons fait connoître jusqu'à présent; car on ne peut la ramener à aucune de ces dernières.

184. Soit pour exemple $\int\frac{x^m\,dx}{(lx)^n}$; il en résultera

$P=x^m$, $Q=(m+1)x^m$, $R=(m+1)^2x^m$, $S=(m+1)^3x^m$, etc.

d'où

$$\int\frac{x^m dx}{(lx)^n}=\left\{\begin{array}{l}-\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}}-\frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}\\ -\frac{(m+1)^2x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}}\ldots\ldots\\ +\frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots.1}\int\frac{x^m\,dx}{lx}\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

en supposant que n soit un nombre entier.

La formule précédente ne donne rien lorsque $m=-1$;

mais dans ce cas, la différentielle se réduit à $\frac{dx}{x(lx)^n}$, et s'intègre immédiatement; il en résulte

$$-\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}}+const.$$

Si on avoit en même temps $n=1$ la différentielle $\frac{dx}{x\,lx}$ qui viendroit alors, auroit pour intégrale $l(lx)+const.$, puisqu'en faisant $lx=u$, elle se transformeroit en $\frac{du}{u}$.

L'intégrale $\int\frac{x^m dx}{lx}$, de laquelle dépend $\int\frac{x^m dx}{(lx)^n}$, quand n est un nombre entier, peut être ramenée à une forme plus simple, en faisant $x^{m+1}=z$; on a alors $x^m dx=\frac{dz}{m+1}$, $lx=\frac{lz}{m+1}$, et par conséquent, $\int\frac{x^m dx}{lx}=\int\frac{dz}{lz}$.

On trouvera plus bas le développement de l'intégrale $\int\frac{dz}{lz}$, en série. Elle se rapporte aux fonctions exponentielles; car en posant $lz=u$, il vient $z=e^u$, $dz=e^u du$ et $\int\frac{dz}{lz}=\int\frac{e^u du}{u}$, formule dont l'intégration exacte est encore à desirer.

185. Nous allons nous occuper maintenant de l'intégration des fonctions exponentielles; nous ferons d'abord remarquer que la différentielle $V dx$, dans laquelle V seroit une fonction algébrique de a^x, ne présenteroit aucune difficulté, puisqu'en supposant seulement $a^x=u$,

d'où résulteroit $x = \frac{lu}{la}$, $dx = \frac{du}{ul\,a}$, elle deviendroit algébrique par rapport à la nouvelle variable u. On trouve un exemple de ce cas dans la différentielle $\frac{a^x dx}{\sqrt{1+a^{nx}}}$ qui se change en $\frac{u\,du}{ul\,a\sqrt{1+u^n}}$.

186. Soit la différentielle $P a^x dx$; on la décomposera dans les deux facteurs $a^x dx . P$; le premier étant intégré donne $\frac{1}{la} a^x$ (27); et il en résulte par conséquent $\int P a^x dx = \frac{1}{la} P a^x - \frac{1}{la} \int a^x dP$. Faisant

$$dP = Q dx, \quad dQ = R dx, \quad dR = S dx, \text{ etc.}$$

et continuant la réduction présentée ci-dessus, on trouvera cette série :

$$\int P a^x dx = \frac{1}{la} P a^x - \frac{1}{(la)^2} Q a^x + \frac{1}{(la)^3} R a^x \ldots .$$
$$\ldots . \pm \frac{1}{(la)^n} \int V a^x dx.$$

le signe + répondant au cas où n est impaire, et le signe — à celui où n est paire.

En intégrant d'abord le facteur $P dx$ de la différentielle proposée $\int P a^x dx$, et faisant $\int P dx = N$, on auroit eu cette réduction

$$\int P a^x dx = a^x N - (la) \int N a^x dx;$$

et en la continuant, après avoir supposé $\int N dx = M$, $\int M dx = L$, etc. il viendroit

$$\int P a^x dx = a^x N - (la) a^x M + (la)^2 a^x L \ldots . \pm (la)^n \int G a^x dx.$$

187.

187. L'application de la première formule de l'article précédent conduira à l'intégrale exacte, toutes les fois que P sera une fonction rationnelle et entière, parce qu'alors le nombre des quantités $Q=\frac{dP}{dx}$, $R=\frac{dQ}{dx}$, $S=\frac{dR}{dx}$, etc. sera limité; la dernière sera constante (18), et par conséquent $\int V a^x dx$ se changera en $V\int a^x dx = V\frac{a^x}{la} + const.$

Soit pour exemple $P=x^n$, n désignant un nombre entier positif: on aura dans ce cas

$dP=nx^{n-1}dx$,

l'équation

$$\int P a^x dx = \frac{1}{la} P a^x - \frac{1}{la}\int a^x dP$$

donnera

$$\int a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{la} - \frac{n}{la}\int a^x x^{n-1} dx;$$

et en continuant on trouvera

$Q=nx^{n-1}$, $R=n(n-1)x^{n-2}$, $S=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$...

d'où

$$\int a^x x^n dx =$$

$$a^x\left\{\frac{x^n}{la} - \frac{nx^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(la)^3} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{(la)^4}\right.$$
$$\left. \ldots\ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{(la)^{n+1}}\right\} + const.$$

188. La seconde formule du n°. 186 ne convient qu'au cas où les quantités $N=\int P dx$, $M=\int N dx$, $L=\int M dx$, etc. peuvent s'obtenir algébriquement; mais elle s'applique avec succès à l'exemple ci-dessus,

quand n est un nombre entier négatif. On a alors

$$P=\frac{1}{x^n},\quad N=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}},\quad M=+\frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$$

$$L=-\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}},\ \text{etc.}$$

d'où

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^n}=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a^x\,la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$$

$$-\frac{a^x(la)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}\cdots-\frac{a^x(la)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1x}$$

$$+\frac{(la)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int\frac{a^x\,dx}{x}+\textit{const.}$$

On ne sauroit pousser la réduction au-delà de $\int\frac{a^x\,dx}{x}$; car l'équation $\int Pa^x dx=a^xN-la\int Na^x dx$, de laquelle se tirent toutes les réductions, devient

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^n}=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{la}{n-1}\int\frac{a^x\,dx}{x^{n-1}},$$

et ne donne rien, lorsque $n=1$.

Nous retombons encore dans cet exemple sur la transcendante $\int\frac{a^x\,dx}{x}$, dont nous avons déjà parlé n°. 184. Si on pouvoit obtenir son expression, on auroit en même temps l'intégrale $\int a^x x^n\,dx$, pour tous les cas où n est un nombre entier.

189. Lorsque n est un nombre fractionnaire, les deux séries dont on vient de faire usage, ne se terminent point. Si on avoit, par exemple $n=-\frac{1}{2}$, on trouveroit par la première

$$\int\frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{la}+\frac{1}{2x(la)^2}+\frac{1.3}{4x^2(la)^3}+\right.$$

$$\left.\frac{1.3.5}{8x^3(la)^4}+\text{etc.}\right)+\textit{const.}$$

et par la deuxième,

$$\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{a^x}{\sqrt{x}}\left(\frac{2x}{1} - \frac{4x^2 la}{1.3} + \frac{8x^3 (la)^2}{1.3.5} - \frac{16x^4 (la)^3}{1.3.5.7} + \text{etc.}\right) + const.$$

Nous ferons observer que dans le cas où la formule proposée seroit $\int a^x x^{n+\frac{p}{q}} \mathrm{d}x$, n étant un nombre entier, on pourroit la ramener à $\int a^x x^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x$, par le moyen de la première série, si n étoit positif, et par le moyen de la seconde, si n étoit négatif.

190. En remplaçant a^x par son développement (24) dans la fonction $\int P a^x \mathrm{d}x$, on aura

$$\int P a^x \mathrm{d}x = \int P \mathrm{d}x + \frac{la}{1}\int Px\mathrm{d}x + \frac{(la)^2}{1.2}\int P x^2 \mathrm{d}x + \frac{(la)^3}{1.2.3}\int P x^3 \mathrm{d}x + \frac{(la)^4}{1.2.3.4}\int P x^4 \mathrm{d}x + \text{etc.}$$

ce qui fournira un nouveau développement de $\int P a^x \mathrm{d}x$, toutes les fois qu'on pourra obtenir les fonctions

$$\int P \mathrm{d}x, \int P x \mathrm{d}x, \ldots \int P x^n \mathrm{d}x, \text{ etc.}$$

Si $P = x^n$, il viendra

$$\int a^x x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2} la}{1(n+2)} + \frac{x^{n+3}(la)^2}{1.2(n+3)} + \frac{x^{n+4}(la)^3}{1.2.3(n+4)} + \text{etc.} + const.$$

et dans cette série il faudra mettre lx au lieu de $\frac{x^{n+i}}{n+i}$, lorsque n sera un entier négatif, égal à $-i$.

En appliquant ce moyen à la formule $\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x}$, on

trouve

$$\int\frac{a^x\,dx}{x}=lx+\frac{x\,la}{1.1}+\frac{x^2(la)^2}{1.2.2}+\frac{x^3(la)^3}{1.2.3.3}+\frac{x^4(la)^4}{1.2.3.4.4}+\text{etc.}+const.$$

On transforme cette série en faisant $a^x=z$, ou $x=\frac{lz}{la}$ (184), et il vient

$$\int\frac{dz}{lz}=llz+\frac{lz}{1.1}+\frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3}+\frac{1}{4}\frac{(lz)^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}+const.$$

191. Il y a encore un autre moyen d'intégrer une fonction exponentielle, telle par exemple que $\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2}$; c'est de chercher à la rapporter à la différentielle de la fonction e^xP, qui est $e^x(dP+P\,dx)$, et dans laquelle P représente une fonction algébrique de x. C'est principalement la sagacité et l'habitude du calcul qui peuvent guider dans ce procédé. L'exemple proposé étant fort simple, il suffira de faire $1+x=z$; on aura alors

$$\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2}=\frac{e^{z-1}(z-1)\,dz}{z^2}=\frac{1}{e}\left\{e^z\left(\frac{1}{z}dz-\frac{dz}{z^2}\right)\right\},$$

et avec un peu d'attention on voit bien que $-\frac{dz}{z^2}$ étant la différentielle de $\frac{1}{z}$, on doit avoir $P=\frac{1}{z}$, d'où résulte l'intégrale $\frac{e^z}{ez}+const.$ Remettant au lieu de z sa valeur, on trouvera $\int\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2}=\frac{e^x}{1+x}+const.$

De l'intégration des fonctions circulaires.

192. Soit la formule $\int X\,dx\,\text{arc}\,(\sin = x)$; si on intègre d'abord le facteur $X\,dx$, en observant que $d.\,\text{arc}\,(\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et faisant $\int X\,dx = V$, on aura

$$\int X\,dx.\,\text{arc}\,(\sin = x) = V.\,\text{arc}\,(\sin = x) - \int \frac{V\,dx}{\sqrt{1-x^2}} :$$

l'intégration de la formule proposée sera donc ramenée à celle d'une fonction algébrique, si V est algébrique.

Prenons pour exemple $\int x^n\,dx.\,\text{arc}\,(\sin = x)$; nous aurons alors $V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, et $\int x^n\,dx\,\text{arc}\,(\sin = x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.\,\text{arc}\,(\sin = x) - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$: la formule $\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ a été traitée dans les nos. 173 et 174.

193. Comme $d.\,\text{arc}\,(\cos = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$d.\,\text{arc}\,(\text{tang} = x) = \frac{dx}{1+x^2},$$

on aura, en opérant de la même manière que ci-dessus,

$$\int X\,dx.\,\text{arc}\,(\cos = x) = V.\,\text{arc}\,(\cos = x) + \int \frac{V\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int X\,dx.\,\text{arc}\,(\text{tang} = x) = V.\,\text{arc}\,(\text{tang} = x) - \int \frac{V\,dx}{1+x^2}$$

et l'intégration de ces formules ne dépendra que de celle

d'une fonction algébrique, toutes les fois que V sera algébrique.

194. Si z représente un arc dont le sinus, ou le cosinus, ou la tangente, etc. soient exprimés en fonction de x, c'est-à-dire, qu'on ait $\mathrm{d}z = X_1 \mathrm{d}x$, X_1 étant une fonction donnée de x, on obtiendra $\int X z^n \mathrm{d}x$ par un procédé semblable à celui des articles précédens. Soit $\int X \mathrm{d}x = V$; on aura $\int X z^n \mathrm{d}x = V z^n - n \int V z^{n-1} \mathrm{d}z$; mettant pour $\mathrm{d}z$ sa valeur, et faisant $\int V X_1 \mathrm{d}x = U$, on trouvera

$$\int V z^{n-1} \mathrm{d}z = U z^{n-1} - (n-1) \int U z^{n-2} \mathrm{d}z.$$

En suivant cette marche, on abaissera de plus en plus l'exposant de z, et on parviendra enfin à faire disparoître cet arc, si n est un nombre entier positif.

Le cas le plus simple est celui où $X = 1$, et où z est l'arc dont le sinus $= x$; il vient alors

$$dx = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad V = x, \quad U = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$T = -x, \quad S = \int \frac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}, R = x, \text{etc.}$$

et ces valeurs donnent $\int z^n \mathrm{d}x =$

$$z^n x + n z^{n-1} \sqrt{1-x^2} - n(n-1) z^{n-2} x$$

$$- n(n-1)(n-2) z^{n-3} \sqrt{1-x^2} + \text{etc.}$$

série qui s'arrête lorsque n est un nombre entier positif.

Si on avoit $X \mathrm{d}x = \mathrm{d}z$, ou $X = X_1$, l'intégrale $\int X z^n \mathrm{d}x$ se changeroit en $\int z^n \mathrm{d}z = \frac{z^{n+1}}{n+1} + const.$ et si on substituoit à z^n une fonction algébrique quelconque de z, l'intégrale considérée par rapport à z rentreroit

dans quelqu'une des formules traitées précédemment.

195. Avant de passer à des fonctions un peu générales des quantités z, $\sin z$, $\cos z$, etc. il faut se rappeler que par les n°s. 32, 33, on a

$$\text{d.}\sin nz = n\,\text{d}z\cos nz, \text{ d'où } \int \text{d}z\cos nz = \frac{1}{n}\sin nz + const.$$

$$\text{d.}\cos nz = -n\,\text{d}z\sin nz, \qquad \int \text{d}z\sin nz = -\frac{1}{n}\cos nz + const.$$

$$\text{d.tang}\,nz = \frac{n\,\text{d}z}{(\cos nz)^2}, \int\frac{\text{d}z}{(\cos nz)^2} = \frac{1}{n}\text{tang}\,nz + const.$$

$$\text{d.cot}\,nz = -\frac{n\,\text{d}z}{(\sin nz)^2}, \int\frac{\text{d}z}{(\sin nz)^2} = -\frac{1}{n}\cot nz + const.$$

$$\text{d.sec}\,nz = \frac{n\,\text{d}z\sin nz}{(\cos nz)^2}, \int\frac{\text{d}z\sin nz}{(\cos nz)^2} = \frac{1}{n}\sec nz + const.$$

$$= \frac{1}{n\cos nz} + const.$$

$$\text{d.cosec}\,nz = -\frac{n\,\text{d}z\cos nz}{(\sin nz)^2}, \int\frac{\text{d}z\cos nz}{(\sin nz)^2} = -\frac{1}{n}\text{cosec}\,nz + const.$$

$$= -\frac{1}{n\sin nz} + const.$$

196. De ces intégrations résulte celle des expressions

$$\text{d}z\,(A + B\sin z + C\sin 2z + D\sin 3z + \text{etc.})$$
$$\text{d}z\,(A + B\cos z + C\cos 2z + D\cos 3z + \text{etc.})$$

qui donnent

$$Az - B\cos z - \tfrac{1}{2}C\cos 2z - \tfrac{1}{3}D\cos 3z + \text{etc.} + const.$$
$$Az + B\sin z + \tfrac{1}{2}C\sin 2z + \tfrac{1}{3}D\sin 3z + \text{etc.} + const.$$

197. Il est très-important d'observer que l'on peut ramener à des termes de la forme

$$A\sin mz, \quad \text{ou } A\cos mz$$

toute fonction rationnelle de $\sin z$ et de $\cos z$. Cette opération qui réduit l'intégration d'une différentielle de même forme à ce qui a été dit dans les n^os^. précédens, facilite encore le calcul numérique des formules résultantes, parce qu'il y a beaucoup de cas où l'usage des sinus et des cosinus des multiples d'un arc, est plus commode que celui des puissances de ces lignes.

Les formules (*trig.* 26)

$$\begin{aligned}
\sin a \cos b &= \tfrac{1}{2}\sin(a+b) + \tfrac{1}{2}\sin(a-b)\\
\cos a \sin b &= \tfrac{1}{2}\sin(a+b) - \tfrac{1}{2}\sin(a-b)\\
\sin a \sin b &= -\tfrac{1}{2}\cos(a+b) + \tfrac{1}{2}\cos(a-b)\\
\cos a \cos b &= \tfrac{1}{2}\cos(a+b) + \tfrac{1}{2}\cos(a-b)
\end{aligned}$$

sont les élémens de la transformation que nous venons d'indiquer ; car si l'on prend $b = a$ dans les deux dernières, elles donneront

$$\begin{aligned}
\sin a^2 &= -\tfrac{1}{2}\cos 2a + \tfrac{1}{2}\\
\cos a^2 &= \tfrac{1}{2}\cos 2a + \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

en faisant attention que $\cos(a-b) = \cos 0 = 1$.
Puis comme

$$\sin a^3 = \sin a^2 . \sin a, \quad \cos a^3 = \cos a^2 . \cos a,$$

il viendra

$$\begin{aligned}
\sin a^3 &= (-\tfrac{1}{2}\cos 2a + \tfrac{1}{2})\sin a\\
&= -\tfrac{1}{2}\cos 2a \sin a + \tfrac{1}{2}\sin a.\\
\cos a^3 &= (\tfrac{1}{2}\cos 2a + \tfrac{1}{2})\cos a\\
&= \tfrac{1}{2}\cos 2a \cos a + \tfrac{1}{2}\cos a.
\end{aligned}$$

Ces deux résultats renferment les produits

$$\cos 2a \sin a \qquad \text{et } \cos 2a \cos a$$

qu'on exprimera en sinus des multiples de a, au moyen de la première et de la dernière des formules rapportées plus haut, et en y faisant $b = 2a$.

Ce calcul est trop facile pour que je m'y arrête; et il

est évident qu'en procédant de proche en proche, comme on vient de le voir, on s'élevera

de $\sin a^3$ à $\sin a^4$, à $\sin a^5$, etc.
de $\cos a^3$ à $\cos a^4$, à $\cos a^5$, etc.

198. Au lieu de construire ces formules particulières, j'en vais tirer de générales des équations (164)

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx.$$

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1}\sin nx.$$

En ajoutant ces deux équations, et dégageant $\cos nx$, on trouve

$$\cos nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n + (\cos nx - \sqrt{-1}\sin x)^n}{2};$$

puis en retranchant la seconde de la première, et dégageant $\sin nx$, on obtient

$$\sin nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}\sin nx)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces expressions quoiqu'affectées d'imaginaires, n'en sont pas moins réelles, parce que ces signes disparoissent tous par le développement des puissances indiquées. En effet on a

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos x^n + n\sqrt{-1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \text{etc.}$$

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos x^n - n\sqrt{-1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \text{etc.}$$

et substituant ces séries dans les valeurs ci-dessus, on arrive à

$$\cos nx = \cos x - \frac{n(n-1)}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\cos x^{n-4}\sin x^4 + \text{etc.}$$

$$\sin nx = n\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\cos x^{n-3}\sin x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5}\cos x^{n-5}\sin x^5 + \text{etc.}$$

199. Par les formules ci-dessus on développe les sinus et les cosinus d'arcs multiples, suivant les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple; voici comment on peut résoudre la question inverse, c'est-à-dire, celle où il s'agit d'exprimer les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple, par les sinus et cosinus de ses multiples :

Soit

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = u$$
$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = v,$$

on aura

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(u+v), \qquad \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v);$$

et de là on tirera d'abord

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}(u+v)^n.$$

En développant la puissance indiquée dans le second membre de cette équation, il viendra

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\ .\ 3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}\right\};$$

mais dans l'expression $(u+v)^n$ on peut changer v en u, et réciproquement, ce qui donnera

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{ v^n + n v^{n-1} u + \frac{n(n-1)}{2} v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} v^{n-3}u^3 + \text{etc.} \right\};$$

en ajoutant ces deux résultats, on aura

$$2\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{ u^n + v^n + n(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \text{etc.} \right\}$$

On peut donner à cette équation la forme suivante,

$$2^{n+1}\cos x^n = \left\{ u^n + v^n + nuv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{2} u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} u^3v^3(u^{n-6} + v^{n-6}) + \text{etc.} \right\}$$

mais on a

$$\cos nx = \tfrac{1}{2}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n + \tfrac{1}{2}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \tfrac{1}{2}u^n + \tfrac{1}{2}v^n,$$

et cela quelle que soit n : on en pourra conclure

$$u^n + v^n = 2\cos nx,$$

et en général

$$u^{n-m} + v^{n-m} = 2\cos(n-m)x;$$

de plus il est aisé de voir que $uv = 1$, par conséquent on aura

$$2^{n+1}\cos x^n = \left\{ 2\cos nx + 2n\cos(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2}\cos(n-4)x + \frac{2n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\cos(n-6)x + \text{etc.} \right\},$$

ou bien, en divisant tout par 2,

$$2^n \cos x^n = \left\{ \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos(n-6)x + \text{etc.} \right\};$$

En continuant cette formule comme celle du binome de Newton, on arrivera, lorsque n sera un nombre entier, à des cosinus d'arcs négatifs qui sont précisément les mêmes que ceux des arcs positifs correspondans ; on écrira donc $\cos(m-n)x$ au lieu de $\cos(n-m)x$, et dans ce cas la formule s'abrège ainsi qu'on va le voir.

Dans le développement de $(u+v)^n$, lorsque n est un nombre entier, les termes placés à égale distance des extrêmes ont le même coefficient ; pareille chose aura lieu dans l'expression

$$\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos(n-6)x + \text{etc.}$$

et de plus les cosinus placés à égale distance des extrêmes de cette formule sont égaux. En effet, le premier terme étant $\cos nx$, le dernier est affecté de $\cos(n-2n)x$ ou de $\cos -nx$, qui est égal à $\cos nx$: au terme affecté de $\cos(n-2m)x$, qui en a m avant lui, correspond au terme affecté de $\cos(-n+2m)x$, qui en a m après lui ; et comme

$$\cos(-n+2m)x = \cos-(n-2m)x = \cos(n-2m)x,$$

on peut omettre les termes affectés de cosinus d'arcs négatifs, en prenant le double de chacun de ceux qui en contiennent de positifs.

On pourra donc, en s'arrêtant au terme où les arcs

deviennent négatifs, écrire..... $2^n \cos x^n =$

$$\left\{ 2\cos nx + \frac{2n}{1}\cos(n-2)x + \frac{2n(n-2)}{1.2}\cos(n-4)x + \text{etc.} \right\}$$

Il faut néanmoins observer que dans le cas où n est un nombre pair, la formule a un terme moyen également éloigné de l'un et de l'autre extrême, et représenté par

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n}{2}+1)}{1.2.\ldots\ldots\frac{n}{2}}\cos(n-n)x$$: à cause de

$\cos 0 = 1$, il se réduit à $\frac{n(n-1)\ldots(\frac{n}{2}+1)}{1.2.\ldots\ldots\frac{n}{2}}$; et parce qu'il est unique, il ne doit pas être multiplié par 2 comme les autres.

On aura donc pour dernier résultat.... $2^{n-1}\cos x^n =$

$$\left\{ \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1..2}\cos(n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \text{etc.} \right\}$$

en observant de s'arrêter dans cette formule, lorsqu'on rencontrera un arc négatif, et de ne prendre que la moitié du coefficient du cosinus de l'arc nul qu'on trouvera, si n est pair. Avec cette attention, il sera facile de former les valeurs de la table ci-jointe :

$\cos x = \cos x$
$2\cos x^2 = \cos 2x + 1$
$4\cos x^3 = \cos 3x + 3\cos x$
$8\cos x^4 = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$
$16\cos x^5 = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x$
$32\cos x^6 = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$
$64\cos x^7 = \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x$
etc.

200. Pour déterminer $\sin x^n$, on fera usage de l'équation

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u - v),$$

et on trouvera

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(u - v)^n$$

ou

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{u^n - \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}\right\}$$

1°. Soit n un nombre pair; dans ce cas, $(u-v)^n = (v-u)^n$ et par conséquent on aura encore

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(v - u)^n.$$

En développant le second membre de cette équation qu'on ajoutera à la première, il viendra

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\begin{array}{l} u^n + v^n - \frac{n}{1}(u^{n-1}v + v^{n-1}u) \\ \quad + \frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) \\ \quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

ou bien

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\begin{array}{l} u^n + v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2} + v^{n-2}) \\ \quad + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) \\ \quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^3v^3(u^{n-6} + v^{n-6}) + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

résultat qui est le même, aux signes près, que celui du

n°. précédent; nous pouvons donc écrire tout de suite

$$(2\sqrt{-1})^n \sin x^n =$$

$$\cos nx - \frac{n}{2}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\cos(n-4)x$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}\cos(n-6)x + \text{etc.}$$

L'imaginaire disparoît, parce que n est un nombre pair; et on a $(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n$, le signe supérieur ayant lieu, si n est doublement pair, c'est-à-dire multiple de 4, et le signe inférieur, s'il est simplement divisible par 2.

On fera sur le second membre de cette équation les mêmes raisonnemens que dans l'article précédent; et parce que n est un nombre entier, on en conclura qu'on peut se borner aux termes qui ne renferment que des arcs positifs, pourvu qu'on prenne le double de chacun d'eux. De plus, comme n est pair, il y aura un terme dégagé de cosinus, qu'il ne faudra pas doubler; et en divisant tout par 2, on aura $\pm 2^{n-1} \sin x^n =$

$$\left\{ \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\cos(n-4)x \right.$$

$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}\cos(n-6)x + \text{etc.} \right\}$$

en observant de s'arrêter, lorsqu'on trouvera un arc nul, et de ne prendre que la moitié du coefficient de ce terme.

2°. Si n est un nombre impair, il vient alors

$$(v-u)^n = -(u-v)^n,$$

par conséquent

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(u-v)^n = -\frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(v-u)^n;$$

et le développement de la seconde expression est

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{-v^n + \frac{n}{1}v^{n-1}u - \frac{n(n-1)}{1.2}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}v^{n-3}u^3 + \text{etc.}\right\}$$

En l'ajoutant à celui de la première, et faisant les réductions nécessaires, on trouvera

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{u^n - v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2} - v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4} - v^{n-4}) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^3v^3(u^{n-5} - v^{n-6}) + \text{etc.}\right\}$$

Mais par le n°. 198,

$$\sin nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n\right\} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u^n - v^n),$$

quelle que soit n; quant au produit uv, il est toujours égal à l'unité : ainsi, on aura en général

$$u^{n-m} - v^{n-m} = 2\sqrt{-1}\sin(n-m)x,$$

par conséquent

$$\sin x^n = \frac{\sqrt{-1}}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x - \frac{n(n-1)n-2)}{1.2.3.}\sin(n-6)x + \text{etc.}\right\}$$

L'imaginaire n'affecte pas plus cette formule que les précédentes; car n étant un nombre impair,

$$(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n\sqrt{-1},$$

le

le signe supérieur ayant lieu si n est de la forme $4k+1$, c'est-à-dire, un multiple de 4 augmenté de l'unité, et le signe inférieur, si on a simplement

$$n = 2k+1.$$

On peut encore ici se borner aux termes affectés de sinus d'arcs positifs en prenant le double de chacun d'eux. Car il est d'abord évident par les mêmes raisons que précédemment, que les termes placés à égale distance des extrêmes, ont le même coefficient, et que l'un est affecté d'un arc positif, et l'autre d'un arc négatif: à la vérité, comme le nombre des termes de la formule est pair, et qu'ils sont alternativement positifs et négatifs, les termes correspondans seront de signe contraire; mais aussi le sinus de l'arc négatif est lui-même négatif: cette différence de signe se trouve donc corrigée, et les termes dont il s'agit se réunissent dans un seul.

D'après ces considérations, et en divisant par 2, il viendra.

$$2^{n-1}\sin x^n = \left\{\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2.}\sin(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\sin(n-6)x + \text{etc.}\right.$$

On déduira des deux formules que nous venons de trouver, les valeurs contenues dans la table suivante:

$$\sin x = \sin x$$
$$2\sin x^2 = -\cos 2x + 1$$
$$4\sin x^3 = -\sin 3x + 3\sin x$$
$$8\sin x^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$$
$$16\sin x^5 = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x$$
$$32\sin x^6 = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10$$
$$64\sin x^7 = -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x$$

etc.

Voilà pour les cas où n seroit un nombre entier; s'il étoit fractionnaire, il faudroit avoir recours à la première formule du n°. précédent. On y feroit $x = 1^q - z$, ce qui donneroit $\cos x = \sin z$; et par conséquent l'expression de $\cos x^n$ par les cosinus des multiples de x, seroit celle de $\sin z^n$ par les cosinus des multiples de $1^q - z$, ou du complément de l'arc z.

201. Soit à intégrer la différentielle $\int dx \cos x^4$; on tirera d'abord des formules du n°. 199

$$\cos x^4 = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8},$$

et on aura

$$\int dx \cos x^4 = \frac{1}{8}\int dx \cos 4x + \frac{1}{2}\int dx \cos 2x + \frac{3}{8}\int dx$$

$$= \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3x}{8} + const.$$

Cet exemple montre assez comment il faudroit opérer sur tous ceux qui pourroient s'offrir.

202. Les formules

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

changeant les fonctions de sinus et de cosinus en exponentielles, ramènent l'intégration des unes à celle des autres.

On peut aussi changer la différentielle $dx \sin x^m \cos x^n$, en une autre qui soit comprise dans les différentielles binomes: il suffit de faire $\sin x = z$, d'où il résulte

$$\cos x = \sqrt{1 - z^2}, \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \text{ (35)};$$

et on obtient ensuite

$$\int dx \sin x^m \cos x^n = \int z^m dz (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

En appliquant à la dernière expression les réductions des n°s 170-172, on l'intégrera si m est un nombre impair, on la fera dépendre de

$$\int dz (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

si m est paire, et on ramènera cette dernière à $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ ou à un arc de cercle, si n est un nombre entier. Dans tous les autres cas, on réduira l'intégrale de la formule proposée à celle de la différentielle analogue la plus simple.

Il est visible qu'on peut transformer de la même manière les différentielles contenant les autres lignes trigonométriques.

203. Voici quelques formules pour intégrer immédiatement les différentielles affectées de sinus ou de cosinus.

Soit $dz \sin z^n$; en mettant cette différentielle sous la forme $dz \sin z . \sin z^{n-1}$, et en intégrant le premier facteur, on trouvera

$$\int dz \sin z^n = -\cos z \sin z^{n-1} + (n-1) \int dz \cos z^2 \sin z^{n-2}$$

mais puisque $\cos z^2 = 1 - \sin z^2$, on aura

$$\int dz \sin z^n = -\cos z \sin z^{n-1} + (n-1) \int dz \sin z^{n-2} - (n-1) \int dz \sin z^n;$$

et réunissant les termes affectés de $\int dz \sin^n$, on trouvera

$$\int dz \sin z^n = -\frac{1}{n} \cos z \sin z^{n-1} + \frac{n-1}{n} \int dz \sin z^{n-2};$$

l'intégration de la formule proposée est donc ramenée à celle de $\int dz \sin z^{n-2}$. En opérant sur cette dernière expression, comme sur la première, on la fera dépendre de $\int dz \sin z^{n-4}$; et en continuant ainsi de proche en proche, on tombera sur $\int dz \sin z^0$, si n est un nombre pair, ou

sur $\int dz \sin z$, si n est un nombre impair. La première de ces formules a pour intégrale $z + const.$ et la seconde $-\cos z + const.$

La réduction précédente conduiroit à cette formule générale

$$\int dz \sin z^n = -\frac{1}{n}\cos z \sin z^{n-1} - \frac{(n-1)}{n(n-2)}\cos z \sin z^{n-3} - \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}\cos z \sin z^{n-5} + \text{etc.}$$

qui seroit terminée par

$$+\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1}{n(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 2}z + const.$$

si n étoit paire

et par $$-\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 2}{n(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 3}\cos z + const.$$

si n étoit impaire.

Lorsque n sera un nombre fractionnaire, on ramenera $\int dz \sin z^n$ à $\int dz \sin z^{n-m}$, m étant le plus grand nombre entier contenu dans n.

204. En traitant de la même manière $\int dz \cos z^n$, on obtiendra d'abord $\int dz \cos z^n =$

$$\int dz \cos z \cos z^{n-1} = \sin z \cos z^{n-1} + (n-1)\int dz \sin z^2 \cos z^{n-2};$$

mettant $1 - \cos z^2$ au lieu de $\sin z^2$, il en résultera

$$\int dz \cos z^n = \sin z \cos z^{n-1} + (n-1)\int dz \cos z^{n-2} - (n-1)\int dz \cos z^n,$$

d'où

$$\int dz \cos z^n = \frac{1}{n}\sin z \cos z^{n-1} + \frac{n-1}{n}\int dz \cos z^{n-2}.$$

Cette dernière équation conduit à $\int dz \cos z^0 = z + const.$ lorsque n est paire, et à $\int dz \cos z = -\sin z + const.$ quand

n est impaire. On en tire la formule suivante

$$\int dz \cos z^n = \frac{1}{n} \sin z \cos z^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)} \sin z \cos z^{n-3}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \sin z \cos z^{n-5} + \text{etc.}$$

terminée par

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 2} z + const.$$

lorsque n est paire, et par

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 3} \sin z + const.$$

quand n est impaire.

205. En appliquant le procédé ci-dessus à la formule $\int dz \sin z^m \cos z^n$, on trouve

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = \int dz \sin z \cos z^n . \sin z^{m-1} =$$

$$-\frac{1}{n+1} \cos z^{n+1} \sin z^{m-1} + \frac{m-1}{n+1} \int dz \cos z^{n+2} \sin z^{m-2};$$

mais à cause de $\cos z^{n+2} = \cos z^n . \cos z^2 = \cos z^n (1 - \sin z^2)$, on obtient

$$\int dz \cos z^{n+2} \sin z^{m-2} = \int dz \cos z^n \sin z^{m-2} - \int dz \cos z^n \sin z^m.$$

Substituant dans la première équation, et prenant la valeur de $\int dz \sin z^m \cos z^n$, il en résultera

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = -\frac{\sin z^{m-1} \cos z^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dz \sin z^{m-2} \cos z^n.$$

On a aussi $\int dz \sin z^m \cos z^n = \int dz \cos z \sin z^m . \cos z^{n-1} =$

$$\frac{1}{m+1} \sin z^{m+1} \cos z^{n-1} + \frac{n-1}{m+1} \int dz \sin z^{m+2} \cos z^{n-2};$$

de plus,

$$\sin z^{m+2} = \sin z^m . \sin z^2 = \sin z^m (1 - \cos z^2),$$

et par conséquent

$$\int dz \sin z^{m+2} \cos z^{n-2} = \int dz \sin z^m \cos z^{n-2} - \int dz \sin z^m \cos z^n.$$

Cette valeur mise, dans celle de $\int dz \sin z^m \cos z^n$, conduit à une équation de laquelle on tire

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = \frac{\sin z^{m+1} \cos z^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dz \sin z^m \cos z^{n-2}.$$

Appliquons ces formules à $\int dz \sin z^8 \cos z^7$. La première donnera

$$\int dz \sin z^8 \cos z^7 = -\tfrac{1}{15} \sin z^7 \cos z^8 + \tfrac{7}{15} \int dz \sin z^6 \cos z^7,$$

et par la seconde on aura

$$\int dz \sin z^6 \cos z^7 = \tfrac{1}{13} \sin z^7 \cos z^6 + \tfrac{6}{13} \int dz \sin z^6 \cos z^5.$$

En employant ainsi alternativement l'une et l'autre, on trouvera

$$\int dz \sin z^6 \cos z^5 = -\tfrac{1}{11} \sin z^5 \cos z^6 + \tfrac{5}{11} \int dz \sin z^4 \cos z^5$$
$$\int dz \sin z^4 \cos z^5 = \tfrac{1}{9} \sin z^5 \cos z^4 + \tfrac{4}{9} \int dz \sin z^4 \cos z^3$$
$$\int dz \sin z^4 \cos z^3 = -\tfrac{1}{7} \sin z^3 \cos z^4 + \tfrac{3}{7} \int dz \sin z^2 \cos z^3$$
$$\int dz \sin z^2 \cos z^3 = \tfrac{1}{5} \sin z^3 \cos z^2 + \tfrac{2}{5} \int dz \sin z^2 \cos z$$
$$\int dz \sin z^2 \cos z = -\tfrac{1}{3} \sin z \cos z^2 + \tfrac{1}{3} \int dz \cos z;$$

mais $\frac{1}{3} \int dz \cos z = \frac{1}{3} \sin z + const.$ et remontant de chacune de ces valeurs à celle qui la précède, on trouvera

$$\int dz \sin z^8 \cos z^7 = -\frac{1}{15} \sin z^7 \cos z^8$$
$$+ \frac{1.7}{15.13} \sin z^7 \cos z^6 - \frac{1.7.6}{15.13.11} \sin z^5 \cos z^6$$
$$+ \frac{1.7.6.5}{15.13.11.9} \sin z^5 \cos z^4 - \frac{1.7.6.5.4}{15.13.11.9.7} \sin z^3 \cos z^4$$
$$+ \frac{1.7.6.5.4.3}{15.13.11.9.7.5} \sin z^3 \cos z^2 - \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3} \sin z \cos z^2$$
$$+ \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3} \sin z + const.$$

206. Nous allons nous occuper dans cet article de l'intégration des quatre différentielles suivantes

$$\frac{dz}{\sin z}, \quad \frac{dz}{\cos z}, \quad \frac{dz\cos z}{\sin z}, \quad \frac{dz\sin z}{\cos z}.$$

La première devient successivement

$$\frac{dz}{\sin z}=\frac{dz\sin z}{\sin z^2}=\frac{dz\sin z}{1-\cos z^2}=\frac{-dx}{1-x^2},$$

en faisant $\cos z=x$; son intégrale est donc

$$\int\frac{dz}{\sin z}=-\tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}=-\tfrac{1}{2}l\frac{1+\cos z}{1-\cos z}=l\frac{\sqrt{1-\cos z}}{\sqrt{1+\cos z}}+const.$$

Pour la seconde on a

$$\frac{dz}{\cos z}=\frac{dz\cos z}{\cos z^2}=\frac{dz\cos z}{1-\sin z^2}=\frac{dx}{1-x^2},$$

en faisant $\sin z=x$; et par conséquent

$$\int\frac{dz}{\cos z}=\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\tfrac{1}{2}l\frac{1+\sin z}{1-\sin z}=l\frac{\sqrt{1+\sin z}}{\sqrt{1-\sin z}}+const.$$

La troisième et la quatrième sont évidemment des différentielles logarithmiques, en sorte qu'on a

$$\int\frac{dz\cos z}{\sin z}=l\sin z+const.=\int\frac{dz}{\tang z}=\int dz\cot z$$

$$\int\frac{dz\sin z}{\cos z}=-l\cos z+const.=\int dz\tang z=\int\frac{dz}{\cot z}$$

En ajoutant ensemble ces deux dernières formules, on trouvera

$$\int\frac{dz}{\sin z\cos z}=l\frac{\sin z}{\cos z}+const.=l\tang z+const.$$

On peut donner aux intégrales

$$\int\frac{dz}{\sin z}=l\frac{\sqrt{1-\cos z}}{\sqrt{1+\cos z}}+const.$$

et $$\int\frac{dz}{\cos z}=l\frac{\sqrt{1+\sin z}}{\sqrt{1-\sin z}}+const.$$

une forme plus simple. On sait que

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+B).\tang\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\cos B-\cos A}{\cos B+\cos A},$$

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(A+B)}{\tang\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}\ (Trig.\ 26).$$

Cela posé, en prenant $\cos B=1$, $\cos A=\cos z$ on aura $B=0$, $A=z$; la première formule deviendra

$$(\tang\tfrac{1}{2}z)^2=\frac{1-\cos z}{1+\cos z},$$

et donnera par conséquent

$$\int\frac{dz}{\sin z}=l.\tang\tfrac{1}{2}z+const.$$

Si on fait ensuite dans la seconde formule $\sin A=1$ et $\sin B=\sin z$, il viendra $A=1^q$ et $B=z$,

d'où $\frac{1+\sin z}{1-\sin z}=\frac{\tang(0^q,5+\frac{1}{2}z)}{\tang(0^q,5-\frac{1}{2}z)}$; mais

$$\tang(0^q,5-\tfrac{1}{2}z)=\cot(0^q,5+\tfrac{1}{2}z)=\frac{1}{\tang(0^q,5+\frac{1}{2}z)};$$

donc $\frac{1+\sin z}{1-\sin z}=[\tang(0^q,5+\frac{1}{2}z)]^2$, donc

$$\int\frac{dz}{\cos z}=l.\tang(0^q,5+\tfrac{1}{2}z)+const.$$

207. Les réductions du n°. 205 peuvent s'employer pour les deux différentielles $\frac{dz\sin z^m}{\cos z^n}$, $\frac{dz\cos z^n}{\sin z^m}$; mais

nous observerons qu'il suffit de s'occuper de l'une d'elles, car si on fait $z = 1q - y$, on aura $dz = -dy$, $\sin z = \cos y$, $\cos z = \sin y$; et la substitution de ces valeurs dans la première lui fera prendre la même forme que la seconde et réciproquement.

En changeant $+n$ en $-n$, dans la première formule du n°. cité, il viendra

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n} = -\frac{1}{m-n}\frac{\sin z^{m-1}}{\cos z^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{dz \sin z^{m-2}}{\cos z^n}.$$

On voit que cette réduction conduira à $\int \frac{dz \sin z}{\cos z^n}$, si m est impaire, et à $\int \frac{dz}{\cos z^n}$, si m est paire. La première de ces deux intégrales est $-\frac{1}{(n-1)\cos z^{n-1}} + const.$ et quand $n = 1$, elle se change en $l.\cos z + const.$

Si on fait n négative dans la seconde formule du n°. 205, on trouvera

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n} = \frac{1}{m-n}\frac{\sin z^{m+1}}{\cos z^{n+1}} - \frac{(n+1)}{m-n}\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^{n+2}},$$

d'où on tirera

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^{n+2}} = \frac{1}{n+1}\frac{\sin z^{m+1}}{\cos z^{n+1}} - \frac{m-n}{n+1}\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n}.$$

changeant $n+2$ en n, $n+1$ en $n-1$, et n en $n-2$, il en résultera

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin z^{m+1}}{\cos z^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^{n-2}}.$$

Par le moyen de cette formule, on passera aussi de

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^{n-2}} \text{ à } \int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^{n-4}},$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z},$$

quand n sera impaire ou jusqu'à $\int d\,z \sin z^m$, quand n sera paire.

Si on avoit $m = n$, on ne pourroit se servir que de cette réduction, qui devient inutile à son tour, dans le cas où $n = 1$; mais alors la différentielle proposée se réduit à $\frac{dz \sin z}{\cos z}$, traitée n°. 206.

Lorsque $m = n - 2$ la différentielle proposée s'intègre; car la seconde réduction ci-dessus donne dans ce cas,

$$\int \frac{d\,z \sin z^{n-2}}{\cos z^n} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin z^{n-1}}{\cos z^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \operatorname{tang} z^{n-1},$$

expression à laquelle il ne faut plus qu'ajouter une constante.

Pour achever la solution de la question que nous nous sommes proposée, il nous reste à traiter les intégrales

$$\int \frac{d\,z}{\cos z^n} \text{ et } \int \frac{d\,z \sin z^m}{\cos z}.$$

En employant pour la seconde, la première des réductions obtenues précédemment, il viendra

$$\int \frac{d\,z \sin z^m}{\cos z} = -\frac{1}{m-1} \sin z^{m-1} + \int \frac{d\,z \sin z^{m-2}}{\cos z};$$

l'application réitérée de cette formule ramenera l'intégrale cherchée à $\int \frac{d\,z \sin z}{\cos z} = -\text{l.}\cos z + const.$ quand m sera impaire, et à $\int \frac{d\,z}{\cos z} = \text{l. tang}\,(0^q,5 + \frac{1}{2}z) + const.$ (206) quand m sera paire. Nous laissons au lecteur le soin de construire, pour s'exercer, une table des valeurs de $\int \frac{d\,z \sin z^m}{\cos z}$ pour les cas où $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc.

La seconde réduction appliquée à la formule $\int \frac{dz}{\cos z^n}$ donne

$$\int \frac{dz}{\cos z^{n}} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin z}{\cos z^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dz}{\cos z^{n-2}},$$

et conduira par conséquent à

$$\int \frac{dz}{\cos z} = l.\tang\left(90,5 + \tfrac{1}{2}z\right) + const.$$

si n est impaire, et à $\int dz = z + const.$ si n est paire.

208. Soit $\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n}$; en changeant à la fois $+m$ en $-m$ et $+n$ en $-n$, dans les réductions du n°. 205, on trouvera

$$\frac{dz}{\sin z^m \cos z^n} = \frac{1}{m+n}\frac{1}{\sin z^{m+1}\cos z^{n-1}} + \frac{m+1}{m+n}\int \frac{dz}{\sin z^{m+2}\cos z^n}$$

$$\frac{dz}{\sin z^m \cos z^n} = -\frac{1}{m+n}\frac{1}{\sin z^{m-1}\cos z^{n+1}} + \frac{n+1}{m+n}\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^{n+2}},$$

d'où il résultera

$$\frac{dz}{\sin z^{m+2}\cos z^n} = -\frac{1}{m+1}\frac{1}{\sin z^{m+1}\cos z^{n-1}} + \frac{m+n}{m+1}\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n}$$

$$\frac{dz}{\sin z^m \cos z^{n+2}} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin z^{m-1}\cos z^{n+1}} + \frac{m+n}{n+1}\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n}.$$

Changeant $m+2$ en m dans la première de ces équations et $n+2$ en n dans la seconde, on aura

$$\frac{dz}{\sin z^m \cos z^n} = -\frac{1}{m-1}\frac{1}{\sin z^{m-1}\cos z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dz}{\sin z^{m-2}\cos z^n}$$

$$\frac{dz}{\sin z^m \cos z^n} = \frac{1}{n-1}\frac{1}{\sin z^{m-1}\cos z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^{n-2}}.$$

Ces deux formules peuvent être employées alternativement comme l'ont été celles du n°. 205, dans

l'exemple $\int dz \sin z^5 \cos z^7$, et diminueront ainsi successivement l'exposant de $\sin z$, puis celui de $\cos z$; et en continuant les réductions autant qu'il sera possible, on parviendra à l'une des trois intégrales ci-dessous :

$$\int \frac{dz}{\sin z} = l.\tang \tfrac{1}{2}z + const.$$

$$\int \frac{dz}{\cos z} = l.\tang (90^\circ,5 + \tfrac{1}{2}z) + const.$$

$$\int \frac{dz}{\sin z \cos z} = l.\tang z + const. \text{ (n°. 206).}$$

On peut aussi s'élever de celles-ci à des cas plus compliqués, tels que

$$\int \frac{dz}{\sin z^2}, \int \frac{dz}{\cos z^2}, \int \frac{dz}{\sin z \cos z^2}, \int \frac{dz}{\sin z^3 \cos z}, \int \frac{dz}{\sin z^2 \cos z^2}, \text{ etc.}$$

En remarquant avec soin la liaison des diverses formules auxquelles nous sommes parvenus dans ce qui précède, par un petit nombre de moyens très-simples, il sera facile de voir que l'intégrale de $dz \sin z^m \cos z^n$ s'obtiendra toutes les fois que m et n seront des nombres entiers, soit positifs, soit négatifs; il n'en est pas de même quand ces exposans sont fractionnaires : il faut avoir recours aux séries, excepté dans un petit nombre de cas où l'intégration se présente d'elle-même.

Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales.

209. Le développement des intégrales en série, ne conduit à une approximation que dans le cas où les séries qu'on obtient sont convergentes, ce qui n'arrive pas toujours; c'est pourquoi les Analystes ont cherché les moyens de parvenir à des valeurs approchées des intégrales,

quelles que soient les fonctions différentielles proposées. Nous allons exposer ici celui qu'Euler a donné dans son traité de Calcul Intégral.

Soit $X\,dx$ la différentielle à intégrer; $\int X\,dx$ est une quantité indéterminée dans un certain sens, puisqu'elle doit renfermer une constante arbitraire (146): c'est encore ce que les considérations suivantes vont confirmer. Si on fait $\int X\,dx = y$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2X}{dx^2}, \text{ etc.}$$

mais la connoissance de ces coefficiens différentiels ne suffit pas pour déterminer le développement de y; il faut encore y joindre celle de la valeur particulière de y, lorsque $x = 0$ (19). Tout ce qu'on peut donc faire au moyen des expressions données de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. c'est de passer de la valeur de $\int X\,dx$, prise pour une certaine valeur particulière de x, à celle qui répond à une autre valeur de x.

Soit par exemple Y la valeur de $\int X\,dx$, correspondante à $x = a$ et Y_1 celle qui est relative à $x = a_1$; on fera dans la formule du n°. 21, $x = a$, $h = a_1 - a$, et désignant par Y', Y'', Y''', etc. les valeurs de X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, etc. prises dans l'hypothèse de $x = a$, il en résultera

$$Y_1 = Y + Y'\frac{(a_1-a)}{1} + Y''\frac{(a_1-a)^2}{1.2} + Y'''\frac{(a_1-a)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

On voit par cette formule que si aucun des coefficiens Y, Y', Y'', Y''', etc. ne devient infini, que a_1 soit très-peu différent de a, on pourra déterminer assez exactement la valeur de Y_1.

Nommant Y_2 la valeur de $\int X\,dx$, relative à une troi-

sième valeur de x, désignée par a_2, et représentant par Y'_1, Y''_1, Y'''_1, etc. ce que deviennent $X, \frac{dX}{dx}, \frac{d^2X}{dx^2}$, etc. lorsque $x = a_1$, on aura

$$Y_2 = Y_1 + Y'_1 \frac{(a_2 - a_1)}{1} + Y''_1 \frac{(a_2 - a_1)^2}{1.2} + Y'''_1 \frac{(a_2 - a_1)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

On peut continuer de la même manière pour une suite de valeurs de x, représentées par a_3, a_4, etc. auxquelles on suppose répondre des valeurs de $\int X\,dx$, désignées par Y_3, Y_4, etc.

Concevons pour un moment qu'on ait pris chacune des quantités a_1, a_2, a_3, a_4, etc. assez peu différente de celle qui la précède, pour que le quarré et les puissances supérieures de $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, etc. puissent être négligées sans erreur sensible, il en résultera ces approximations :

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y + Y'(a_1 - a) \\ Y_2 &= Y_1 + Y'_1(a_2 - a_1) \\ Y_3 &= Y_2 + Y'_2(a_3 - a_2) \\ Y_4 &= Y_3 + Y'_3(a_4 - a_3) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

En mettant successivement la valeur de Y_1, dans celle de Y_2, celle de Y_2 dans celle de Y_3, et ainsi de suite, on trouvera

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y + Y'(a_1 - a) \\ Y_2 &= Y + Y'(a_1 - a) + Y'_1(a_2 - a_1) \\ Y_3 &= Y + Y'(a_1 - a) + Y'_1(a_2 - a_1) + Y'_2(a_3 - a_2) \\ Y_4 &= Y + Y'(a_1 - a) + Y'_1(a_2 - a_1) + Y'_2(a_3 - a_2) + Y'_3(a_4 - a_3) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On peut s'élever de cette manière à une expression approchée de $\int X\,dx$, relative à telle valeur de x qu'on voudra.

Posons que a_n représente le dernier terme de la série a, a_1, a_2... et que Y_n soit la valeur de $\int X\,dx$, correspondante à $x=a_n$; il est évident, d'après les valeurs précédentes, que l'expression approchée de Y_n se formera en poussant jusqu'au terme $Y'_{n-1}(a_n-a_{n-1})$, dans lequel Y'_{n-1} désigne ce que devient X lorsqu'on y met a_{n-1} pour x : on aura donc

$$Y_n=Y+Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)+Y'_2(a_3-a_2)\ldots+Y'_{n-1}(a_n-a_{n-1}).$$

Si les différences a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, etc. sont toutes égales à α, la valeur précédente de Y_n deviendra

$$Y_n=Y+\alpha(Y'+Y'_1+Y'_2\ldots+Y'_{n-1}).$$

Ces valeurs seront d'autant plus exactes que les quantités a, a_1,... seront plus voisines les unes des autres.

En regardant les différences a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, comme infiniment petites, les quantités $Y'(a_1-a)$, etc. $Y'_1(a_2-a_1)$, $Y'_2(a_3-a_2)$, etc. seront ce que devient la différentielle $X\,dx$, lorsqu'on fait successivement $x=a$, $x=a_1$, $x=a_2$, etc. C'est sous ce point de vue que l'on conçoit l'intégrale comme la somme d'un nombre infini *d'élémens*, égaux aux valeurs consécutives que prend la différentielle par les divers changemens qu'éprouve la variable x (voyez la note, page 188 de ce vol.).

210. Les considérations précédentes font voir bien clairement en quoi l'intégrale $\int X\,dx$ diffère d'une fonction primitive donnée, renfermant x et des constantes déterminées. La valeur de cette dernière sera déterminée lorsqu'on aura assigné celle qu'on veut attribuer à x; mais la même opération ne fera que fixer où doit s'arrêter la série Y, $Y'(a_1-a)$, $Y'_1(a_2-a_1)$, $Y'_2(a_3-a_2)$, etc. et la somme de cette série restera encore indéterminée tant qu'on n'aura rien statué sur la valeur de x, à laquelle

doit répondre son premier terme et sur celle de ce premier terme.

Il suit de là que l'intégrale $\int X \, dx$ est une fonction de x, dont la valeur se trouve renfermée entre deux limites qui sont indéterminées. Cette conséquence mérite la plus grande attention, et elle peut se tirer immédiatement de l'existence de la constante arbitraire. Faisons $\int X \, dx = P$, P étant la fonction de x que donne immédiatement le procédé de l'intégration; la valeur complète de $\int X \, dx$ sera $P + const.$ En assignant à x deux valeurs particulières a et b et nommant A et B celles que prend P dans ces hypothèses, on aura $A + const.$ pour la première valeur de $\int X \, dx$, et $B + const.$ pour la seconde; prenant leur différence, on trouvera $A - B$, résultat indépendant de la constante arbitraire et qui n'est autre chose que la somme de la série ci-dessus prise depuis le terme correspondant à $x = a$, jusqu'au terme correspondant à $x = b$.

Quand on détermine la constante en supposant que l'intégrale reçoive une certaine valeur lorsqu'on s'en donne une pour x, on ne fait que fixer un des termes de la série, Y, par exemple, duquel on part ensuite pour former tous les autres; et l'intégrale rentre alors dans le cas des fonctions primitives qui n'exigent pour leur détermination que celle de la variable qu'elles renferment. Il faut remarquer que le premier terme Y est absolument indépendant de tous les autres et n'influe sur aucun d'eux, mais seulement sur leur somme totale.

211. Nous avons commencé la série Y, $Y'(a_1 - a)$, etc. par le terme relatif à $x = a$; nous aurions pu partir du dernier terme a_n pour revenir au premier. En effet, si nous faisons

faisons dans la série du n°. 21 $h=-(a_n-a_{n-1})$, nous aurons

$$Y_{n-1}=Y_n-Y'_n\frac{(a_n-a_{n-1})}{1}+Y''_n\frac{(a_n-a_{n-1})^2}{1.2}-\text{etc.}$$

On trouvera, en suivant la même notation

$$Y_{n-2}=Y_{n-1}-Y'_{n-1}\frac{(a_{n-1}-a_{n-2})}{1}+Y''_{n-1}\frac{(a_{n-1}-a_{n-2})^2}{1.2}-\text{etc.}$$

$$Y_{n-3}=Y_{n-2}-Y'_{n-2}\frac{(a_{n-2}-a_{n-3})}{1}+Y''_{n-2}\frac{(a_{n-2}-a_{n-3})^2}{1.2}-\text{etc.}$$

et en continuant, on formera la suite

$$Y_n,\ Y_{n-1},\ Y_{n-2},\ldots\ Y_2,\ Y_1,\ Y,$$

correspondante aux valeurs de x, représentées par

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ldots\ a_2,\ a_1,\ a.$$

Si on se borne aux premières puissances des différences a_n-a_{n-1}, $a_{n-1}-a_{n-2}$, etc. et qu'on substitue la valeur de Y_n dans celle de Y_{n-1}, celle-ci dans celle de Y_{n-2}, et ainsi de proche en proche, il viendra

$$Y_{n-1}=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})$$
$$Y_{n-2}=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})$$
$$Y_{n-3}=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})-Y_{n-2}(a_{n-2}-a_{n-3})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_2=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})\ldots\ldots-Y'_3(a_3-a_2)$$
$$Y_1=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})\ldots\ldots-Y'_2(a_2-a_1)$$
$$Y=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})\ldots\ldots-Y'_1(a_1-a).$$

En tirant de cette dernière équation la valeur de Y_n, on aura

$$Y_n=Y+Y'_1(a_1-a)+Y'_2(a_2-a_1)\ldots+Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})+Y'_n(a_n-a_{n-1}).$$

Dans ce résultat, les différences

$$a_1-a,\ a_2-a_1,\ldots\ a_{n-1}-a_{n-2},\ a_n-a_{n-1}$$

sont multipliées par des coefficients éloignés de l'origine d'un rang de plus que dans la valeur de Y_n du n°. 209.

212. Les valeurs de Y_n n'étant qu'approchées, diffèrent toutes deux de la vraie valeur de $\int X\,dx$; pour savoir dans quel sens, il faut examiner d'abord si la quantité X change de signe entre ses deux valeurs extrêmes Y' et Y'_n, et si après avoir été croissante, elle devient décroissante, ou *vice versâ*.

Tant que cette quantité conserve le même signe et varie dans le même sens, si l'une des valeurs Y_n est moindre que la vraie valeur de $\int X\,dx$, l'autre sera plus grande *et vice versâ*.

Pour s'en convaincre, il suffit de comparer les deux expressions approchées d'une même valeur de $\int X\,dx$, celles de Y_1, par exemple, qui sont

$$Y+Y'(a_1-a), \qquad Y+Y'_1(a_1-a).$$

Si on conçoit un très-grand nombre de valeurs de x, intermédiaires entre a et a_1, qu'on les désigne par

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots\ldots \alpha_m$$

et que l'on représente par $y_1, y_2, \ldots y_m$, les valeurs correspondantes de $\int X\,dx$, on aura d'abord

$$a_1-a=\alpha_1-a+\alpha_2-\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2\ldots\ldots+\alpha_m-\alpha_{m-1}+a_1-\alpha_m;$$

et les valeurs de Y_1, rapportées ci-dessus, pourront être mises sous la forme

$$Y+Y'(\alpha_1-a)+Y'(\alpha_2-\alpha_1)\ldots+Y'(a_1-\alpha_m)\ldots(A),$$
$$Y+Y'_1(\alpha_1-a)+Y'_1(\alpha_2-\alpha_1)\ldots+Y'_1(a_1-\alpha_m)\ldots(C);$$

mais si on passe de Y à Y_1, au moyen des valeurs intermédiaires $y_1, y_2, y_3, \ldots$ etc. on trouvera, d'après ce qui précède, deux expressions de Y_1, dont la première sera (209)

$$Y+Y'(\alpha_1-a)+y'_1(\alpha_2-\alpha_1)\ldots\ldots+y'_{m-1}(\alpha_m-\alpha_{m-1})+y'_m(a_1-\alpha_m)\ldots(B).$$

Il est évident que si les quantités

$$Y', y'_1, y'_2, \ldots\ldots y'_m, Y'_1,$$

qui sont les valeurs consécutives de X, forment une progression croissante, tous les termes qui suivent le deuxième de l'expression (B) surpasseront leurs correspondans de l'expression (A) et seront moindres que leurs correspondans dans l'expression (C), laquelle aura en outre son terme $Y'_1(\alpha_1 - a)$ plus grand que $Y'(\alpha_1 - a)$. On voit donc que dans cette hypothèse, la série (B) est comprise entre les séries (A) et (C); et comme on peut concevoir que la première soit aussi près qu'on voudra de la vraie valeur de Y_1, en imaginant un nombre suffisant de termes intermédiaires entre Y et Y_1, on en doit conclure que cette vraie valeur tombe entre les séries (A) et (B). On arriveroit au même résultat en supposant que la progression des quantités

$$Y', y'_1, y'_2 \ldots\ldots y'_m, Y'_1$$

fût décroissante.

Les autres cas se ramènent aux deux que nous venons d'examiner, en considérant à part les portions de l'intégrale $\int X \, dx$, dans lesquelles les valeurs de X sont positives, les portions dans lesquelles ces valeurs sont négatives, et traitant séparément dans chaque portion les valeurs qui forment une progression croissante, et celles qui forment une progression décroissante.

213. Si on retranche Y, de la valeur de Y_n, trouvée n°. 209, il viendra

$$Y_n - Y = Y'(a_1 - a) + Y'_1(a_2 - a_1) \ldots + Y'_{n-1}(a_n - a_{n-1}),$$

d'où on voit que la différence $Y_n - Y$ sera positive si tous les coefficiens Y', Y'_1, etc. sont positifs et qu'on ait $a_n > a$; car on peut toujours, quelles que soient ces deux

dernières quantités, passer de l'une à l'autre par une suite d'intermédiaires aussi rapprochés qu'on le voudra, et porter ainsi le degré d'exactitude de l'équation ci-dessus, aussi loin qu'on le jugera à propos. Il suit de là que *la différence entre les deux valeurs de l'intégrale* $\int X\mathrm{d}x$ *correspondantes à* $x=a_n$ *et à* $x=a$, *sera positive si le coefficient différentiel* X *reste toujours positif depuis l'une de ces valeurs jusqu'à l'autre.* Cette remarque va nous servir à obtenir les deux limites entre lesquelles se trouve comprise une intégrale quelconque.

214. Nous avons fait voir n°. 210, qu'il n'y a de déterminé dans une intégrale, que la différence entre deux de ses valeurs prises relativement à deux valeurs données de x; désignons donc par Y_a et par Y_b les valeurs de $\int X\,\mathrm{d}x$, lorsque $x=a$ et que $x=b$, et cherchons les limites de la quantité Y_b-Y_a. Soient M et m la plus grande et la plus petite de toutes les valeurs que prend le coefficient différentiel X par la substitution des valeurs de x, depuis a jusqu'à b inclusivement; les quantités $M-X$ et $X-m$ demeureront nécessairement positives dans tout cet intervalle, et par conséquent les différences entre les valeurs de $\int(M-X)\mathrm{d}x$ et de $\int(X-m)\,\mathrm{d}x$, relatives à $x=a$, et celles qui correspondent à $x=b$ seront positives (n°. précéd.); mais comme M et m sont des constantes, on aura

$$\int(M-X)\,\mathrm{d}x = Mx - \int X\mathrm{d}x$$
$$\int(X-m)\,\mathrm{d}x = \int X\,\mathrm{d}x - mx.$$

En faisant successivement $x=a$ et $x=b$ dans la première de ces valeurs, il vient

$$Ma-Y_a, \qquad Mb-Y_b;$$

la seconde donne dans les mêmes hypothèses

$$Y_a-ma, \qquad Y_b-mb;$$

les différences

$$Mb-Y_b-(Ma-Y_a), \qquad Y_b-mb-(Y_a-ma)$$

devant être positives, d'après ce qui précède, on a

$$Mb-Y_b>Ma-Y_a. \qquad Y_b-mb>Y_a-ma,$$

d'où il résulte

$$Mb-Ma>Y_b-Y_a, \qquad mb-ma<Y_b-Y_a:$$

la valeur de Y_b-Y_a se trouve donc entre celles de $M(b-a)$ et de $m(b-a)$.

Il faut observer que la quantité M doit être la plus petite des valeurs négatives de X, lorsque ce coefficient n'en a que de telles, depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$; car ce n'est qu'ainsi que la quantité $M-X$, qui se change alors en $X-M$, reste toujours positive dans cet intervalle. Par la même raison on doit toujours prendre pour m la plus grande valeur négative de X, lorsque ce coefficient en a de cette espèce, parmi celles qu'il reçoit, depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$, afin que la quantité $X-m$, qui devient $m-X$ dans ce cas, soit encore positive.

Si la différentielle $X\mathrm{d}x$ étoit de la forme $PQ\mathrm{d}x$, et qu'on pût intégrer le facteur $Q\mathrm{d}x$, on prendroit pour M et pour m la plus grande et la plus petite des valeurs de la fonction P: en représentant $\int Q\mathrm{d}x$ par Z, on auroit

$$\int(MQ-PQ)\mathrm{d}x=MZ-\int PQ\,\mathrm{d}x$$
$$\int(PQ-mQ)\mathrm{d}x=\int PQ\,\mathrm{d}x-mZ;$$

et calculant comme ci-dessus les différences des valeurs que reçoivent ces résultats dans les hypothèses de $x=a$ et de $x=b$, on trouveroit

$$MZ_b-MZ_a>Y_b-Y_a. \qquad mZ_b-mZ_a<Y_b-Y_a.$$

215. Nous ferons connoître dans cet article comment les Analystes indiquent les diverses circonstances dans lesquelles on considère les intégrales. Lorsqu'ils veulent désigner la valeur générale de $\int X\,dx$, ils l'appellent alors *intégrale indéfinie*; et son expression, pour être *complète*, doit contenir une *constante arbitraire*, ajoutée à *la fonction primitive* obtenue par l'intégration. Cette constante se détermine, comme nous l'avons fait dans plusieurs occasions, en assujettissant l'expression de $\int X\,dx$ à prendre une valeur donnée lorsque x en reçoit une autre aussi donnée.

Quand dans une intégrale, dont la constante arbitraire a été déterminée, on donne à la variable x une valeur déterminée, cette intégrale se trouve aussi déterminée par là, et se nomme alors *intégrale définie*; ainsi s'il s'agit de la valeur que prend par la supposition de $x=b$, l'intégrale $\int X\,dx$ assujettie déjà à devenir Y, lorsque $x=a$, cette intégrale est alors définie.

Enfin lorsqu'on évalue la différence entre les valeurs de $\int X\,dx$, relatives à $x=a$ et à $x=b$, différence qui est entièrement indépendante de la constante arbitraire (210), cela s'appelle *prendre l'intégrale* $\int X\,dx$, *depuis* $x=a$, *jusqu'à* $x=b$.

216. Tout ce qui a été trouvé dans les trois numéros précédens se déduit facilement de la considération des courbes, par le moyen desquelles on peut, pour ainsi dire, peindre les résultats que nous avons obtenus de l'Analyse.

FIG. 37. Soit BCZ, *fig.* 37, une courbe telle qu'à l'abscisse $AP=x$, réponde l'ordonnée $PM=X$; il suit de ce qui a été démontré dans le n°. 86, que la différentielle de l'aire BMP de cette courbe est exprimée

par $X\mathrm{d}x$ et que par conséquent l'intégrale de $\int X\mathrm{d}x$ est l'aire BMP elle-même. On voit par là que cette intégrale est doublement indéterminée ; car les aires BMP, $ACMP$, $DEMP$, dont la seule relation est d'avoir pour dernière limite l'ordonnée MP, ont la même différentielle, quelle que soit la place de leur première limite ; de plus, tant qu'on regarde l'abscisse AP comme indéterminée, la position de l'ordonnée MP l'est aussi : donc, dans cet état de choses, les limites qui bornent des deux côtés opposés l'aire curviligne $ACMP$, sont arbitraires ; mais lorsqu'on a fixé les abscisses extrêmes AD et AP, l'espace $DEMP$ renfermé entre les ordonnées ED et PM, élevées sur ces abscisses, est déterminé.

En général on peut considérer l'intégrale $\int X\mathrm{d}x$ comme représentant une portion variable de l'aire de la courbe CMZ, combinée par addition ou par soustraction avec un espace constant quelconque, compris ou non dans cette courbe. C'est sous ce point de vue qu'on peut déterminer la constante arbitraire, de manière que l'intégrale proposée prenne à un point donné P telle valeur qu'on voudra.

217. Considérons maintenant une suite d'abscisses AP, AP', AP'', AP''', etc. respectivement égales à a, a_1, a_2, a_3, etc. élevons les ordonnées correspondantes, et formons les rectangles $M'P'$, $M'P$, $M'P''$, $M''P'$, $M''P'''$, $M'''P''$, etc. il est évident que MP, $M'P'$, M'', P'', $M'''P''$, etc. représenteront les quantités Y', Y'_1, Y'_2, Y'_3, etc. (86), et qu'on aura

$$P'P = a_1 - a, \quad P''P' = a_2 - a_1, \quad P'''P'' = a_3 - a_2, \text{ etc.}$$

D'après ces denominations, la somme des rectangles

MP', $M'P''$, $M''P'''$, etc. ou l'aire du polygone $PMRM'R'M''R''$ etc. intérieur à la courbe, sera équivalente à la suite

$$Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)+Y'_2(a_3-a_2)+\text{etc.}$$

qui, comme on le voit, différera d'autant moins de la valeur du trapèze curviligne $PMM'M''M'''$ etc. que les points P, P', P'', P''', etc. seront plus rapprochés. En ajoutant à cette suite un premier terme Y égal à l'aire $ACMP$, elle donnera l'expression approchée de l'intégrale $\int X\,dx$, depuis l'origine des abscisses.

Si on calcule les rectangles $M'P$, $M''P'$, $M'''P''$, etc. on trouvera que l'aire du polygone $PSM'S'M''S''M'''$, etc. extérieur à la courbe, est exprimée par la suite

$$Y'_1(a_1-a)+Y'_2(a_2-a_1)+Y'_3(a_3-a_2)+\text{etc.}$$

et on en conlura que cette seconde suite donne une valeur qui surpasse le trapèze curviligne $PMM'M''M'''$ etc. tandis que celle qui résulte de la première est moindre, ce qui se rapporte à ce que nous avons déjà vu n°. 212.

Dans le cas que représente la fig. 37, les ordonnées
FIG. 38. vont toujours en croissant; si, comme dans la fig. 38, elles passoient par un *maximum*, dans la partie CM'' antérieure à ce *maximum*, la portion

$$Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)$$

de la première suite représenteroit le polygone $PMRM'R'P''$ intérieur à la courbe, et la portion

$$Y'_2(a_3-a_2)+Y'_3(a_4-a_3)$$

représenteroit le polygone $P''M''S'M'''S''P'''$ extérieur à la courbe; d'où il suit que la première portion de cette suite seroit plus grande que l'aire curviligne correspondante, et que la seconde seroit plus petite. On

verra sans peine que l'inverse a lieu pour la seconde suite, dont la partie antérieure au *maximum* représente le polygone extérieur $PSM'S'M''P''$, tandis que l'autre représente le polygone intérieur $P''R''M''R'''M'''P'''$. Chacune de ces suites peut donc, dans le cas actuel, devenir plus petite ou plus grande que l'aire curviligne; et même lui être égale, si le défaut qui se trouve d'un côté est compensé par l'excès qui a lieu de l'autre.

D'après ces principes, le lecteur discutera facilement le cas où la courbe CMZ, passant au-dessous de son axe, donneroit lieu à une aire négative.

Il est évident, par la figure 39, que l'aire curviligne $PMNQ$ est moindre que le rectangle EQ, formé sur la plus grande ordonnée comprise dans l'espace PQ, et plus grande que le rectangle FP, formé sur la plus petite ordonnée; en faisant donc $AP=a$, $AQ=b$, $ACMP=Y_a$, $ACNQ=Y_b$, $GH=M$, $gh=m$, on aura, comme dans le n°. 214, FIG. 39.

$$EQ=M(b-a)>Y_b-Y^a, \qquad FP=m(b-a)<Y_b-Y^a.$$

218. Entrons maintenant dans quelques détails sur l'application des séries des n°s. 209, 211. Pour obtenir la valeur de $\int X\,\mathrm{d}\,x$, correspondante à $x=b$, il faudra connoître *à priori*, ou s'être donné la valeur que doit avoir cette même intégrale lorsque x est égal à une quantité déterminée a. Posant ensuite $b=a_n$, on formera la série a, a_1, a_2, a_3, ... a_n, dans laquelle les quantités intermédiaires a_1, a_2, a_3, etc., devront être d'autant plus rapprochées, que le coefficient différentiel X, dont les valeurs particulières sont représentées par Y', Y'_1, Y'_2, Y'_3, etc. variera plus dans l'intervalle de $x=a$ à $x=b$. C'est pour cela que nous n'avons point prescrit de partager la différence $b-a$ ou a_n-a en parties égales, de

manière que la suite a, a_1, a_2, etc. soit une progression par différences ; il en faudra resserrer les intervalles partout où les coefficiens Y', Y'_1, Y'_2, etc. croîtront ou décroîtront rapidement.

Soit par exemple $X = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; il est évident que lorsque x approche de l'unité, un très-petit changement dans la valeur de cette variable en produit un très-grand dans celle de X ; si donc on demandoit l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, depuis $x=0$, jusqu'à $x=1-\delta$, δ étant une petite quantité, il faudroit, vers la dernière limite, multiplier beaucoup les valeurs intermédiaires données à x. La même intégrale ne peut se calculer immédiatement jusqu'à $x=1$, par la méthode que nous proposons ici; car alors X devient infini, sans que pourtant la valeur de $\int X\,dx$ le soit, puisque

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x} + const.$$

Cette difficulté tient à ce que dans l'intégration le facteur $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ passe du dénominateur au numérateur ; et elle aura lieu en général lorsque X sera de la forme $\frac{V}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ et qu'on aura $p<q$. Pour la lever, on fera $a-x=z^q$, ce qui donnera

$x=a-z^q$ $dx=-qz^{q-1}dz$ et $X\,dx=-qVz^{q-p-1}dz$, quantité qui ne deviendra plus infinie quand $x=a$ ou $z=0$, si la fonction V reste finie dans cette circonstance ; on calculera donc alors l'intégrale $\int Vz^{q-p-1}dz$, depuis $z=0$, jusqu'à $z=\delta$, δ étant une quantité assez petite, et on

aura ainsi la partie de la valeur de $\int \frac{V\,dx}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ correspondante à l'intervalle compris entre $x=a$ et $x=a-\delta$.

On peut encore obtenir l'intégrale $\int \frac{V\,dx}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ depuis $x=a$ jusqu'à $x=a-\delta$, en faisant seulement $x=a-z$; parce que la petitesse de la variable z renfermée entre les limites très-étroites o et δ, permet de simplifier beaucoup le coefficient différentiel. Si on avoit, par exemple, $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, la différentielle à intégrer après la transformation indiquée, seroit

$$\frac{-(a-z)^2\,dz}{\sqrt{4a^3z-6a^2z^2+4az^3-z^4}}=\frac{-(a^2-2az+z^2)dz}{\sqrt{z}.\sqrt{4a^3-6a^2z+4az^2-z^3}}.$$

En réduisant la fraction

$$\frac{a^2-2az+z^2}{\sqrt{4a^3-6a^2z+4az^2-z^3}}$$

en série ordonnée suivant les puissances de z, et en s'arrêtant au quarré de cette variable, on auroit enfin

$$-\int \frac{dz\sqrt{a}}{2\sqrt{z}}\left(1-\frac{z}{6a}+\frac{z^2}{8a^2}\right)=-\sqrt{az}+\frac{z\sqrt{z}}{6\sqrt{a}}+\frac{7z^2\sqrt{z}}{4a^2\sqrt{a}}$$

Ce résultat, qui s'évanouit lorsque $z=0$ donnera, par la substitution de δ à z, la valeur de l'intégrale cherchée, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a-\delta$. Le reste de cette intégrale pourra se calculer par le moyen des séries des nos. 209 et 211.

En général, des transformations que l'habitude de l'analyse peut seule suggérer, rendent ces séries applicables dans un très-grand nombre de cas qui paroissent

d'abord se refuser à la méthode proposée. Soit par exemple $\int \frac{X\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$;

ici le coefficient différentiel devient infini, quand $x=a$, quand $x=b$; et si on fait $x=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)\cos z$, et qu'on désigne par Z ce que devient alors la fonction X, on aura $\int Z\,dz$, formule rationnelle.

219. Pour donner plus d'exactitude au résultat, et n'être pas obligé de multiplier autant les quantités intermédiaires a_1, a_2, a_3, etc., on ne négligera point, comme nous l'avons fait dans les nos. 209, 211, le quarré ni les puissances supérieures des différences a_1-a, a_2-a_1, etc. et on aura alors, en allant de $x=a$ à $x=a_n$,

$$Y_1=Y+Y'\frac{(a_1-a)}{1}+Y''\frac{(a_1-a)^2}{1.2}+Y'''\frac{(a_1-a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$Y_2=Y_1+Y'_1\frac{(a_2-a_1)}{1}+Y''_1\frac{(a_2-a_1)^2}{1.2}+Y'''_1\frac{(a_2-a_1)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$Y_3=Y_2+Y'_2\frac{(a_3-a_2)}{1}+Y''_2\frac{(a_3-a_2)^2}{1.2}+Y'''_2\frac{(a_3-a_2)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_n=Y_{n-1}+Y'_{n-1}\frac{(a_n-a_{n-1})}{1}+Y''_{n-1}\frac{(a_n-a_{n-1})^2}{1.2}+Y'''_{n-1}\frac{(a_n-a_{n-1})^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

En ajoutant toutes ces équations et effaçant les quantités communes aux deux membres du résultat, on aura la valeur de Y_n.

Si on partoit de Y_n pour arriver à Y, par le moyen de

la formule du n°. 211, on formeroit les équations

$$Y_{n-1}=Y_n-Y'_n\frac{(a_n-a_{n-1})}{1}+Y'_n\frac{(a_n-a_{n-1})^2}{1.2}$$
$$-Y'''_n\frac{(a_n-a_{n-1})^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$Y_{n-2}=Y_{n-1}-Y'_{n-1}\left(\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{1}\right)+Y''_{n-1}\frac{(a_{n-1}-a_{n-2})^2}{1.2}$$
$$-Y'''_{n-1}\frac{(a_{n-1}-a_{n-2})^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

.....

$$Y=Y_1-Y'_1\frac{(a_1-a)}{1}+Y''_1\frac{(a_1-a)^2}{1.2}-Y'''_1\frac{(a_1-a)^3}{1.2.3}$$

dont l'addition conduit à une seconde valeur de Y_n.

Ces valeurs deviendront plus simples en prenant les différences a_1-a, a_2-a_1, etc. égales entr'elles, ce qui pourra toujours se faire au moins entre deux valeurs de x assez proches l'une de l'autre. Soit donc

$$a_1-a=a_2-a_1=\text{etc.}=\alpha.$$

Les premières équations ci-dessus donneront

$$Y_n=Y+(Y'+Y'_1+Y'_2.....+Y'_{n-1})\frac{\alpha}{1}$$
$$+(Y''+Y''_1+Y''_2.....+Y''_{n-1})\frac{\alpha^2}{1.2}$$
$$+(Y'''+Y'''_1+Y'''_2.....+Y'''_{n-1})\frac{\alpha^3}{1.2.3}$$
$$+\text{etc.}$$

Prenant dans la somme des secondes la valeur de Y_n, on aura

$$Y_n = Y + (Y'_1 + Y'_2 + Y'_3 \ldots\ldots + Y'_n)\frac{\alpha}{1}$$
$$-(Y''_1 + Y''_2 + Y''_3 \ldots\ldots + Y''_n)\frac{\alpha^2}{1.2}$$
$$+(Y'''_1 + Y'''_2 + Y'''_3 \ldots\ldots + Y'''_n)\frac{\alpha^3}{1.2.3}$$
$$-\text{etc.}$$

Lorsqu'aucun des coefficiens X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$ etc. ne change de signe dans l'intervalle de $x=a$ à $x=b$, la vraie valeur de Y_n tombe entre les deux précédentes; et pour plus d'exactitude, on doit prendre la moitié de la somme : on trouve ainsi

$$Y_n = Y + \frac{\alpha}{1}(Y' + Y'_1 + Y'_2 \ldots + Y'_n) - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1}(Y' + Y'_n)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2}(Y'' - Y''_n)$$
$$+\frac{\alpha^3}{1.2.3}(Y''' + Y'''_1 + Y'''_2 \ldots + Y'''_n) - \frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{1.2.3}(Y''' + Y'''_n)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}(Y'''' - Y''''_n)$$
$$+\text{etc.}$$

220. L'intégrale $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$, ne pouvant s'obtenir par la réduction de $e^{-\frac{1}{x}}$ en série, que pour le cas où x seroit très-grand, nous allons, par la formule ci-dessus, en calculer la valeur depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$.

On peut d'abord changer

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x} \text{ en } \int x\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}}x - \int e^{-\frac{1}{x}}dx;$$

la partie $e^{-\frac{1}{x}}x$, s'évanouit lorsque $x=0$, et il en est de même de la seconde partie $\int e^{-\frac{1}{x}}dx$, ainsi qu'on va le voir. On a pour cette intégrale

$$X=e^{-\frac{1}{x}},\quad \frac{dX}{dx}=e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2},\quad \frac{d^2X}{dx^2}=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$\frac{d^3X}{dx^3}=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right),\text{ etc.}$$

Si on fait $x=0$, ces expressions s'évanouiront (58); et par conséquent les quantités Y', Y'', Y''', etc. seront nulles; il en sera de même du premier terme Y, puisqu'on prend l'intégrale à partir de $x=0$. Mettant ensuite α, 2α, 3α, à la place de x, on obtiendra les valeurs de Y'_1, Y''_1, etc. Y'_2, Y''_2, etc. qui donneront $Y_n=$

$$\frac{\alpha}{1}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}}+e^{-\frac{1}{2\alpha}}\ldots+e^{-\frac{1}{n\alpha}}\right]-\frac{1}{2}\frac{\alpha e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2}\frac{1}{n^2\alpha^2}$$

$$+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha^4}-\frac{2}{\alpha^3}\right)+e^{-\frac{1}{2\alpha}}\left(\frac{1}{16\alpha^4}-\frac{2}{8\alpha^3}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{1}{n\alpha}}\left(\frac{1}{n^4\alpha^4}-\frac{1}{n^3\alpha^3}\right)\right]-\frac{1}{2}\frac{\alpha^3e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3}\left(\frac{1}{n^4\alpha^4}-\frac{2}{n^3\alpha^3}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha^4e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{n^6\alpha^6}-\frac{6}{n^5\alpha^5}+\frac{6}{n^4\alpha^4}\right)$$

$+$ etc.

Si on fait $n\alpha = 1$, on aura $\alpha = \frac{1}{n}$ et $Y_n =$

$$\frac{1}{n}\left[e^{-\frac{n}{1}} + e^{-\frac{n}{2}} + e^{-\frac{n}{3}} \ldots + e^{-\frac{n}{n}}\right] - \frac{1}{2ne} + \frac{1}{4n^2e}$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\frac{(n-2)}{1}e^{-\frac{n}{1}} + \frac{(n-4)}{16}e^{-\frac{n}{2}} + \frac{(n-6)}{81}e^{-\frac{n}{3}} \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{(n-2n)}{n^4}e^{-\frac{n}{2}}\right]$$

$$- \frac{1}{12n^3e} + \frac{1}{48n^4e} + \text{etc.}$$

En se bornant aux termes qui sont écrits, et faisant $n=10$, on trouvera, suivant Euler, la valeur de Y_n à un millionième d'unité près, et on l'aura avec une exactitude vingt fois plus grande encore si on prend $n=20$.

Les détails renfermés dans cet article et dans le précédent, suffisent pour montrer comment, avec le secours des transformations et en calculant la valeur d'une intégrale en plusieurs parties, on parvient à en approcher, lorsque les séries qui l'expriment ne sont convergentes que pour un terme limité.

221. La série du théorême de Taylor, donne deux développemens de l'intégrale $\int X\,dx$. Désignant par Y la valeur de cette intégrale quand $x=0$, et nommant Y', Y'', Y''', etc. ce que deviennent alors les quantités X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$ etc. on aura en général

$$\int X\,dx = Y + Y'\frac{x}{1} + Y''\frac{x^2}{1.2} + Y'''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

série dans laquelle Y tient lieu de la constante arbitraire.

En partant de la valeur générale de $\int X dx$, que nous représenterons par y, pour revenir à celle qui répond

à

à $x=0$, il est évident qu'il faut faire $h=-x$, dans la formule du n°. 21, ce qui donnera

$$Y=y-\frac{dy}{dx}\frac{x}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{x^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

remettant dans cette équation, au lieu de $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc. leurs valeurs, et prenant celle de $\int X\,dx$, on aura

$$\int X\,dx=Y+X\frac{x}{1}-\frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3}-\text{etc.}$$

la quantité Y est encore ici la constante arbitraire.

L'intégration conduit aussi à ce développement. En effet, si on décompose la différentielle $X\,dx$ dans les deux facteurs X et dx, et qu'on intègre le second, on aura $\int X\,dx=Xx-\int x\,dX$; mais

$$\int x\,dX=\int\frac{dX}{dx}.x\,dx=\frac{1}{2}x^2\frac{dX}{dx}-\frac{1}{2}\int x^2\frac{d^2X}{dx^2},$$

$$\int x^2\frac{d^2X}{dx^2}=\int\frac{d^2X}{dx^2}.x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\frac{d^2X}{dx^2}-\frac{1}{3}\int x^3\frac{d^3X}{dx^3},$$

$$\int x^3\frac{d^3X}{dx^3}=\int\frac{d^3x}{dx^3}.x^3dx=\frac{1}{4}x^4\frac{d^3X}{dx^3}-\frac{1}{4}\int x^4\frac{d^4X}{dx^4},$$

etc.

mettant successivement pour $\int x\,dX, \int x^2\frac{d^2X}{dx}$ etc. leurs valeurs, il en résultera

$$\int X\,dx=X\frac{x}{1}-\frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3}-\text{etc.}$$

et pour que l'expression de l'intégrale soit complète, il faudra ajouter une constante à son développement, qui par-là deviendra semblable au précédent. Cette série a été donnée pour la première fois par Jean Bernoulli, et elle porte son nom comme celle du n°. 21 porte celui de Taylor; l'une est à l'égard du Calcul intégral, ce que

l'autre est par rapport au Calcul différentiel. Les intégrations que nous avons effectuées sur $\int X \mathrm{d}x$, et qui ne sont que l'application de la formule

$$\int u \mathrm{d}v = uv - \int v \mathrm{d}u \quad (148),$$

s'appellent *Intégrations par parties.*

222. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le coefficient différentiel du premier ordre ; mais si on ne connoissoit que le coefficient différentiel du second ordre, il faudroit alors deux intégrations successives pour remonter à la fonction primitive dont il tire son origine. Soit X le coefficient différentiel du second ordre de la fonction y, on aura $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = X$, et en multipliant les deux membres par $\mathrm{d}x$, il viendra $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} = X\mathrm{d}x$; or $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x}$ est la différentielle de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, prise en regardant $\mathrm{d}x$ comme constant : on aura donc $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \int X \mathrm{d}x$. Représentons par P la fonction primitive de x, égale à $\int X \mathrm{d}x$, et par C la constante arbitraire, et nous aurons $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P + C$; multiplions ensuite les deux membres par dx, nous trouverons $dy = P dx + C dx$, et en intégrant, il viendra $y = \int P dx + Cx + C'$, C' étant une seconde constante arbitraire. Si on remet $\int X dx$, au lieu de P, il en résultera $y = \int dx \int X dx + Cx + C$, expression qui renferme deux intégrations successives.

On peut ramener cette expression à deux intégrales simples, au moyen de l'intégration par parties ; car, en remettant P au lieu de $\int X dx$, on aura

$$\int P dx = Px - \int x dP = x \int X dx - \int X x dx,$$

et par conséquent

$$y = x\int X\,dx - \int Xx\,dx + Cx + C'.$$

Passons maintenant aux différentielles du troisième ordre. Soit X le coefficient différentiel de la fonction y, relatif à cet ordre; on aura $\frac{d^3y}{dx^3} = X$, d'où $\frac{d^3y}{dx^2} = X\,dx$; mais $\frac{d^3y}{dx^2} = d.\frac{d^2y}{dx^2}$; donc $\frac{d^2y}{dx^2} = \int X dx + C$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx} = dx\int X dx + C dx$: intégrant de nouveau, il viendra $\frac{dy}{dx} = \int dx \int X dx + Cx + C'$, ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{dy}{dx} = x\int X\,dx - \int Xx\,dx + Cx + C'.$$

On tire ensuite de là

$$dy = x\,dx\int X\,dx - dx\int Xx\,dx + Cx\,dx + C'\,dx,$$

et en intégrant on a

$$y = \int x\,dx\int X\,dx - \int dx\int Xx\,dx + \tfrac{1}{2}Cx^2 + C'x + C'',$$

C' étant la constante introduite par cette dernière intégration. Il est facile de voir que

$$\int x\,dx\int X\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\int X\,dx - \tfrac{1}{2}\int Xx^2\,dx$$
$$\int dx\int Xx\,dx = x\int Xx\,dx - \int Xx^2\,dx;$$

substituant donc ces valeurs et réduisant entr'eux les termes semblables, on trouvera

$$y = \tfrac{1}{2}(x^2\int Xx\,dx - 2x\int Xx\,dx + \int Xx^2 dx) + \tfrac{1}{2}(Cx^2 + 2C'x + C').$$

Voici comment on indique les intégrales successives. Lorsque X désigne le coefficient différentiel du second

ordre, on a $d^2y=Xdx^2$, et en prenant l'intégrale de chaque membre, on trouve $dy=\int Xdx^2$, puis en intégrant encore une fois, il vient $y=\int\int Xdx^2=\int^2 Xdx^2$: on a de même, quand X est le coefficient différentiel du troisième ordre,

$$d^3y=\int Xdx^3, dy=\int\int Xdx^3, y=\int\int\int Xdx^3=\int^3 Xdx^3,$$

et ainsi de suite pour les ordres supérieurs.

On vérifiera aisément par la différentiation les équations suivantes :

$$\int Xdx^2=dx\int Xdx,\quad \int\int Xdx^2=\int dx\int Xdx$$
$$\int Xdx^3=dx^2\int Xdx,\quad \int\int Xdx^3=\int dx^2\int Xdx=dx\int dx\int Xdx$$
$$\int\int\int Xdx^3=\int dx\int dx\int Xdx, \text{ etc.}$$

Dans ces équations chaque signe $\int$ embrasse tous ceux qui le suivent, et on peut ne laisser sous le dernier que la première puissance de dx.

Cela posé, en négligeant les constantes arbitraires, et en intégrant par parties, comme ci-dessus, on aura

$$\int Xdx=\int Xdx$$
$$\int^2 Xdx^2=\frac{1}{1}[x\int Xdx-\int Xxdx]$$
$$\int^3 Xdx^3=\frac{1}{1.2}[x^2\int Xdx-2x\int Xxdx+\int Xx^2dx]$$
$$\int^4 Xdx^4=\frac{1}{1.2.3}[x^3\int Xdx-3x^2\int Xxdx+3x\int Xxdx-\int Xx^3dx].$$

Les coefficiens numériques de ces expressions sont les mêmes que ceux des puissances du binome $a-b$, et tandis que l'exposant de x hors du signe $\int$ diminue d'une unité à chaque terme, en allant vers la droite, son exposant sous ce signe augmente de la même quantité.

On restituera les constantes arbitraires que nous

avons omises dans cette formule, en écrivant $\int X\mathrm{d}x+C$ pour $\int X\mathrm{d}x$, $\int Xx\mathrm{d}x+C'$ pour $\int Xx\mathrm{d}x$, $\int Xx^3\mathrm{d}x+C''$ pour $\int Xx^2\mathrm{d}x$, et ainsi des autres : car les constantes C, C', C'', etc. étant affectées de diverses puissances de x sont irréductibles entr'elles.

223. Les différentielles que nous avons traitées jusqu'ici sont prises en regardant $\mathrm{d}x$ comme constant, parce que ce sont les seules qui ne renferment qu'un coefficient différentiel. En effet, lorsqu'on fait varier en même temps $\mathrm{d}x$, on a (116) $\mathrm{d}^2y=q\,\mathrm{d}x^2+p\,\mathrm{d}^2x$; si donc on se proposoit la différentielle $U\mathrm{d}x^2+V\mathrm{d}^2x$, il faudroit, pour qu'elle signifiât quelque chose, qu'on eût $V=p$ et $U=q$, d'où résulte $U=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$; et cette condition étant remplie, on n'auroit qu'à intégrer $\int V\mathrm{d}x$. Il est facile d'étendre cette remarque aux différentielles d'un ordre quelconque.

Application du Calcul intégral à la quadrature des Courbes et à leur rectification, à la quadrature des Surfaces courbes et à l'évaluation des volumes qu'elles comprennent.

De la quadrature des Courbes.

224. Le problème général de la quadrature des courbes se réduit à l'intégration de la différentielle $X\mathrm{d}x$, en nommant X la fonction de x, qui exprime l'ordonnée y de la courbe proposée (86). Ce qui précède contient l'exposé des principales méthodes analytiques trouvées jusqu'à présent, pour effectuer cette intégration,

soit rigoureusement, soit d'une manière approchée; il ne s'agit ici que de l'application de ces méthodes aux courbes les plus connues.

Celles dont l'équation est la plus simple sont les paraboles des divers ordres, représentées par l'équation $y^n = px^m$: on en tire $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$, et par conséquent

$$\int X\,dx = \int p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} + const.$$

Toutes ces courbes, comme on voit, sont *quarrables*; c'est-à-dire, qu'on a l'expression finie et algébrique de la surface du segment compris entre leur arc, l'axe des abscisses et l'ordonnée. Il est facile, avec l'expression de ce segment, de calculer celle de tout autre espace contenu entre une portion de la courbe et des lignes droites formant, avec les abscisses et les ordonnées, des polygones dont la Géométrie élémentaire donne la mesure.

Ces courbes proposées passent par l'origine des abscisses, puisqu'on a en même temps $x=0$ et $y=0$; si on veut exprimer leur aire, à partir de ce point, il faut supprimer la constante arbitraire, puisque l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ s'anéantit d'elle-même quand on y fait $x=0$.

FIG. 40. Pour avoir ensuite l'aire $BCMP$, *fig.* 40, comprise entre les ordonnées BC et PM, correspondantes aux abscisses $AB=a$ et $AP=x$, il suffira de retrancher de $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$, qui exprime l'aire $ACMP$, la quantité

$\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}a^{\frac{m+n}{n}}$ égale à l'aire ACB; et on aura ainsi

$$BCMP=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}\left(x^{\frac{m+n}{n}}-a^{\frac{m+n}{n}}\right).$$

Quand l'exposant n est pair, l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ est susceptible du double signe $\pm$, et comme alors les mêmes abscisses AP appartiennent à deux branches de courbes ACM et acm, on a deux segmens $ACMP$ et $acmP$; celui qui renferme les ordonnées positives a une valeur positive et l'autre a une valeur négative.

Lorsque les exposans m et n sont impairs l'un et l'autre, la quantité $x^{\frac{m+n}{n}}$ n'a qu'un seul signe et reste toujours positive, quel que soit le signe de x; mais il est aisé de voir que dans ce cas l'une des deux branches de la courbe proposée a ses abscisses et ses ordonnées négatives en même tems: il suit donc de là que les aires correspondantes à des abscisses et à des ordonnées négatives doivent être regardées comme positives.

Si n seule est impaire, alors la quantité $x^{\frac{m+n}{n}}$ devient négative en même temps que x; mais dans ce cas les deux branches de la courbe proposée sont du même côté de la ligne des abscisses et les ordonnées demeurent toujours positives.

En rapprochant ces remarques, on en conclura que *l'aire d'une courbe est positive quand l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe, et négative lorsque le contraire a lieu.*

Tous les segmens paraboliques ont un rapport constant avec le rectangle $ADMP$, formé sur l'abscisse et

sur l'ordonnée ; car l'expression

$$\frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n} x . p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$$

devient $\frac{n}{m+n} xy$, en vertu de l'équation $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$.

Lorsque $n=m$, la parabole devient une ligne droite, puisqu'on a $y = p^{\frac{1}{n}} x$; le segment $ACMP$ se change dans le triangle AMP, dont la valeur est par la formule ci-dessus, comme par la Géométrie élémentaire, égale à $\frac{1}{2} xy$.

En faisant $n=2$ et $m=1$, on tombe sur le cas de la parabole ordinaire et on trouve $\frac{2}{3} xy$ pour la valeur du segment $ACMP$.

225. Cherchons maintenant la valeur des segmens faits dans les courbes représentées par l'équation $x^m y^n = p$. Cette équation se tire de $y^n = p x^m$, en y changeant $+m$ en $-m$; on a $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$ et

$$\int X \, dx = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} + const.$$

Les courbes proposées sont les hyperboles des divers ordres rapportées à leurs asymptotes, et sont composées de plusieurs branches telles que UMV, FIG. 41. *fig.* 41, inscrites dans les angles que forment ces droites. En comptant les segmens de l'origine des abscisses, ils renferment l'espace indéfini qui se trouve entre la partie CV de la courbe et son asymptote AY ; la valeur de cet espace est finie ou infinie, selon que m est moindre ou plus grande que n. En effet, pour avoir l'espace $BCMP$, pris depuis l'abscisse $AB=a$, jusqu'à l'abscisse $AP=b$, il faut (210) faire successive-

ment $x=a$ et $x=b$ dans l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}}$ et retrancher le premier résultat du second ; on aura donc $BCMP=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}}-a^{\frac{n-m}{n}}\right)$. Si maintenant on suppose $a=0$, le point B tombera sur le point A et l'espace $BCMP$ se changera en $YAPM$; or la quantité $a^{\frac{n-m}{n}}$ sera infinie ou nulle, selon qu'on aura $m>$ ou $<n$: dans le premier cas,

$$YAPM=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n}\left(\frac{1}{0}-b^{\frac{n-m}{n}}\right),$$

et dans le second

$$YAPM=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}}-0\right)=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}b^{\frac{n-m}{n}}.$$

Laissons à a une grandeur déterminée et faisons b infini, nous aurons alors l'espace indéfini $XBCU$, qui sera infini si m est moindre que n, et qui sera égal à $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n}a^{\frac{n-m}{n}}$, si m surpasse n. Il résulte de là que quand m et n sont inégaux, des deux espaces asymptotiques, l'un est infini et l'autre fini.

La raison de cette différence se trouve dans le plus ou moins de rapidité avec laquelle la courbe s'approche de son asymptote; et puisque $y=\frac{p^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$ et $x=\frac{p^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{m}{n}}}$, il est facile de voir que quand on a $m>n$, y décroît beaucoup plus vîte que x, et que par conséquent la courbe s'approche beaucoup plus rapidement de l'asymptote pa-

rallèle aux abscisses, que de celle qui est parallèle aux ordonnées, et *vice versâ*.

En mettant y au lieu de $p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}}$, dans l'expression

$$\frac{np^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-m}{n}}}{n-m}x = \frac{n}{n-m}x.p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}},$$

elle deviendra $\frac{n}{n-m}xy$, et la valeur de l'aire *YAPMI* sera $\frac{nxy}{n-m}$ + *const.* Il sembleroit que le terme $\frac{nxy}{n-m}$ doit s'évanouir lorsqu'on fait $x=0$; mais ce qui précède prouve la nécessité de ne rien prononcer à cet égard avant d'avoir substitué pour y sa valeur en x.

226. Quand $n=m$, on a $xy=p^{\frac{1}{n}}$, ou $xy=p$, en changeant $p^{\frac{1}{n}}$ en p, ce qui est indifférent; la courbe dont il s'agit dans ce cas est l'hyperbole ordinaire et équilatère si l'angle des coordonnées est droit. L'expression générale de l'aire, trouvée au n°. précédent, se présente alors sous une forme infinie quel que soit x, et la différentielle de cette expression étant $\frac{pdx}{x}$ a, pour intégrale, $p\,l\,x$ + *const.* Les espaces asymptotiques sont infinis l'un et l'autre, car lx devient tel par la supposition de $x=0$ et par celle de x infinie. Prenons pour plus de simplicité $p=1$, et soit *UMV*, FIG. 42. *fig.* 42, une des branches de l'hyperbole équilatère dont la *puissance* est égale à l'unité, *AC* son axe: en abaissant du sommet *C* la perpendiculaire *BC* on aura $AB=1$; et comme l'aire $BCMP=l.AP-l.AB$, il viendra, à cause de $l.1=0$, $BCMP=l.AP$. On aura de même $l.AP'=BCM'P'$, $l.AP''=BCM''P''$, etc. d'où il suit

que si les abscisses AP, AP', AP'', etc. sont en progression par quotiens, les aires correspondantes $BCMP$, $BCM'P'$, $BCM''P''$, etc. seront en progression par différences.

227. L'hyperbole que nous venons de considérer étant équilatère ne nous a fourni que les logarithmes népériens; mais en variant l'angle des asymptotes et prenant toujours $AB=1$, on peut obtenir tel système de logarithmes qu'on voudra. Soit UMV, *fig.* 43, une hyperbole quelconque; en menant les ordonnées PM, parallèles à l'asymptote AY, on prouvera, par des raisonnemens analogues à ceux du n°. 86, que le parallélogramme $MPP'R$ est la différentielle de $BCMP$. Or si on mène $P'Q$ perpendiculaire sur PM, on trouvera $P'Q=PP'.\sin P'PQ=PP'.\sin XAY$; désignant par ω l'angle des asymptotes, on aura $P'Q=\mathrm{d}x\sin\omega$, et par conséquent $PMRP'=y\,\mathrm{d}x\sin\omega$. Si on met pour y sa valeur $\frac{p}{x}$, il en résultera $\frac{\mathrm{d}x}{x}p\sin\omega$ pour la différentielle de l'aire $BCMP$; on aura donc $BCMP=\mathrm{l}x-\mathrm{l}.AB$, en prenant $p\sin\omega$ pour module (27). FIG. 43.

On a en général $p=AB^2$; et quand $AB=1$, le module se réduit à $\sin\omega$. Celui des logarithmes ordinaires étant 0,4342945 (29), on a $\sin\omega=0{,}4342945$, d'où il suit que les asymptotes de l'hyperbole dont les aires donnent les logarithmes ordinaires, font entr'elles un angle de 0r,28801.

229. En faisant $AC=a$, $AP=x$ et $PN=y$, *fig.* 44, l'équation du cercle ANE sera $y^2=2ax-x^2$; et la différentielle de son segment ANP aura pour expres- FIG. 44.

sion $dx\sqrt{2ax-xx}$ dont l'intégrale est

$$-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-xx}+\tfrac{1}{2}a^2.\ \text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right),$$

lorsqu'on veut qu'elle s'évanouisse par la supposition de $x=0$ (161, 210).

Il est facile de reconnoître, dans la partie

$$\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-xx},$$

l'expression de la surface du triangle PCN et de voir par conséquent que

$$\tfrac{1}{2}a^2.\ \text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right)\text{ou }\tfrac{1}{2}AC.\text{arc}\,AN$$

est la valeur du secteur ACN.

En supposant $x=2a$, dans l'expression APN, elle devient $\frac{1}{2}a^2.$ arc $(\cos=-1)=\frac{1}{2}a^2\pi$, en désignant par π la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, et elle appartient alors au demi-cercle : on aura donc le cercle entier $a^2\pi=\frac{1}{2}a.\,2\,a\pi$, ainsi qu'on le prouve dans les Elémens de Géométrie.

Le développement de $\int dx\sqrt{2axx-xx}$, trouvé dans le n°. 179, donne des valeurs approchées de l'aire APN.

228. L'ordonnée de l'ellipse étant $\frac{b}{a}\sqrt{2ax-xx}$, le segment elliptique AMP sera égal à $\frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax-xx}$, et comme il est nul en même temps que le segment circulaire APN, on aura $ANP : AMP :: a : b$; car il est facile de conclure du n°. 209 que quand deux différentielles sont dans un rapport constant, ce rapport est aussi

celui des intégrales, si ces intégrales sont nulles en même temps.

229. L'hyperbole rapportée à son axe transverse a pour équation

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2),$$

on a $$AQR=\frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax+x^2}.$$

Cette intégrale peut s'obtenir par les logarithmes (161) ou se développer en série; mais au lieu de nous arrêter à calculer ces résultats, nous allons faire connoître le rapport qu'ont entr'eux les secteurs elliptiques et les secteurs hyperboliques.

230. Soit $ABab$, *fig.* 44, une ellipse dont le demi-grand axe $AC=a$, le demi-petit $BC=b$; faisons $CP=x$, nous aurons FIG. 44.

$$PM=y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Il est évident que le secteur

$$ACM=CMP+AMP,$$

et que $$d.ACM=d.CMP+d.AMP,$$

$$CMP=\frac{1}{2}CP\times PM=\frac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

$$d.CMP=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(dx\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right),$$

$$d.AMP=-\frac{b}{a}dx\sqrt{a^2-x^2}:$$

La dernière de ces différentielles est affectée du signe — parce que l'aire AMP décroît lorsque x augmente; et elles donnent

$$d.ACM=-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Si on fait $\frac{b}{a}=1$, le secteur elliptique ACM se changera dans le secteur ACN, appartenant au cercle $AEae$ décrit sur le grand axe Aa comme diamètre ; on aura donc

$$\text{d.}\,ACN=-\frac{1}{2}\frac{a^2\text{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}a\times-\frac{a\,\text{d}\,x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

mais $-\frac{a\,\text{d}\,x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ étant la différentielle de l'arc AN, dont le cosinus tabulaire $=\frac{x}{a}$, on aura

$$ACN=\frac{1}{2}a\times AN=\frac{1}{2}AC\times AN,$$

et puisque les secteurs ACN et ACM ont leur origine commune au point A, on aura (228)

$$ACM=\frac{b}{a}ACN=\frac{1}{2}BC\times AN.$$

Considérons aussi l'hyperbole XAx décrite sur les mêmes axes que l'ellipse $ABab$. Dans cette courbe dont l'équation est

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

le secteur $ACR=CQR-AQR$, ce qui donne

$$\text{d.}\,ACR=\text{d.}\,CQR-\text{d.}\,AQR;$$

et comme

$$CQR=\frac{1}{2}CQ\times QR=\frac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

on aura

$$\text{d.}\,AQR=\frac{b}{a}\text{d}\,x\sqrt{x^2-a^2},$$

$$\text{d.}\,ACR=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{a^2\text{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

d'où on voit que la différentielle du secteur hyper-

bolique est, aux signes près, la même que celle du secteur elliptique.

231. Le secteur hyperbolique ACM, *fig.* 42, est égal à l'espace asymptotique $BCMP$; car on a FIG. 42.

$$ACM = BCMP + ABC - AMP, \text{ et}$$
$$ABC = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{AP \times PM}{2} = AMP.$$

232. Ce qui précède suffit pour faire voir comment le calcul intégral s'applique à la quadrature des courbes; cependant nous ne pouvons quitter ce sujet sans donner quelques-uns des résultats intéressans auxquels les Géomètres sont parvenus par rapport aux courbes transcendantes.

Dans la Logarithmique, dont l'équation est $y = \mathrm{l}\,x$, on a $\int y\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x\,\mathrm{l}\,x = x\,\mathrm{l}\,x - x + const.$ (182); la partie variable de cette expression devient nulle lorsque $x = 0$, car en faisant $x = \frac{1}{m}$, elle prend la forme $-\frac{\mathrm{l}\,m}{m} - \frac{1}{m}$, sous laquelle elle est nulle quand m est infinie (58). Il est donc inutile, d'après cela, de lui ajouter une constante lorsqu'on veut avoir les segmens à partir du point A, *fig.* 45. FIG. 45.

En y faisant $x = AE = 1$, elle donne l'expression de l'espace asymptotique $cAEx$ qui est fini et égal à -1.

Si on prend les ordonnées à la place des abscisses, on aura $\int x\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x = x$, pour l'espace $CDMX$, fait sur l'axe des ordonnées AC, et dont l'expression est algébrique; nous n'y avons point ajouté de constante, parce qu'elle s'évanouit en même temps que x: l'espace $cAEx$, qui répond à $x = AE = 1$, a, par cette formule, la même valeur que par la précédente, abstraction faite du signe.

Nous avons supposé le module égal à l'unité ; s'il étoit égal à M, on auroit

$$\int dx\,lx = x\,lx - \int M\,dx = x\,lx - Mx \text{ et } \int x\,dy = Mx.$$

233. L'équation de la cycloïde étant

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \text{ (102)},$$

il vient $$\int y\,dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

il seroit facile d'intégrer cette équation par les arcs de cercle, mais on peut arriver à un résultat plus simple en faisant $2a - y = z$, ce qui donne

$$dy = -dz,\ dx = -\frac{(2a - z)\,dz}{\sqrt{2az - z^2}}.$$

FIG. 46. En effet, z représentant l'ordonnée QM, *fig.* 46, prise sur la ligne CK, la différentielle de l'aire $ACQM$ aura pour expression

$$z\,dx = -\frac{(2az - z^2)\,dz}{\sqrt{2az - z^2}} = -dz\sqrt{2az - z^2}$$

donc $$ACQM = -\int dz\sqrt{2az - z^2} + const.$$

En C, où $z = 2a$, l'intégrale $\int dz\sqrt{2az - z^2}$ est égale à la surface du demi-cercle générateur gmq, et elle s'évanouit au point K, où $z = 0$; par conséquent l'espace ACK est égal au demi-cercle $gmqg$. Pour un point quelconque Q, $\int dz\sqrt{2az - z^2}$ donnera l'aire du segment gmn correspondant à $gn = QM$, et on aura

$$ACQM = gmqg - gmn, \quad KMQ = ACK - ACQM = gmn,$$

Le rectangle AK ayant sa hauteur $IK = gq$ et sa base $AI = gmq$, sera quadruple du demi-cercle $gmqg$; et retranchant

retranchant de ce rectangle l'espace $ACK = gmqg$, il restera $AMKI = 3.gmqg$. Il suit de là que l'espace $AKLA$, compris entre une branche de la cycloïde et son axe, est triple du cercle générateur.

234. Il nous reste à parler des spirales; occupons-nous d'abord de celle que représente l'équation $u = At^n$ (104) dans laquelle t est égal à l'arc ON, *fig.* 47; FIG. 47. et $u = AM$. Les coordonnées étant polaires, la différentielle de l'aire sera $\frac{u^2 dt}{2}$ (111); mettant pour u sa valeur, et intégrant, il viendra $\frac{A^2 t^{2n+1}}{4n+2} + const.$ mais on doit négliger la constante lorsqu'on compte les aires à partir de la ligne AO, sur laquelle $t = 0$, et par conséquent la surface $ACM = \frac{A^2 t^{2n+1}}{4n+2}$. Après une révolution du rayon vecteur, on aura l'espace $ACMB = \frac{A^2.(2\pi)^{2n+1}}{4n+2}$, π étant la demi-circonférence du cercle ON; le rayon décrivant reviendra dans la direction AM, et déterminera l'espace $ACMBCM' = A^2 \frac{(2\pi + ON)^{2n+1}}{4n+2}$, et ainsi de suite.

Dans la spirale d'*Archimède* (104), $A = \frac{1}{2\pi}$, $n = 1$ et $ACM = \frac{t^3}{24\pi^2}$, résultat qui, lorsqu'on y fait $t = 2\pi$, donne $ACMB = \frac{\pi}{3}$.

Dans la spirale hyperbolique $n = -1$ et $ACM = \frac{A^2}{2t}$. L'aire de cette courbe, qui fait autour du point A une infinité de révolutions, est infinie lorsque $t = 0$; on se

conduira donc à son égard comme pour les hyperboles, et on aura pour l'aire comprise entre les deux rayons vecteurs correspondans à $t=a$ et à $t=b$,

$$A^2\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2a}\right).$$

Dans la spirale logarithmique enfin (114), $t=lu$, $dt=\frac{du}{u}$; et la différentielle $\frac{u^2dt}{2}$ devenant $\frac{udu}{2}$, donne $ACM=\frac{u^2}{4}$. L'aire est nulle quand $u=0$, mais alors t est infini; car la courbe proposée fait comme la précédente une infinité de révolutions autour du pole A.

235. La différentielle de l'arc d'une courbe rapportée à des coordonnées perpendiculaires entr'elles, est exprimée par $\sqrt{dx^2+dy^2}$ (85); en y substituant, au lieu de dy^2, sa valeur tirée de l'équation différentielle de la courbe proposée, elle prendra la forme Xdx, et son intégrale donnera la longueur de l'arc de cette courbe. Demander la longueur de l'arc d'une courbe, c'est demander sa *rectification*, parce que la solution de ce problême, lorsqu'elle s'obtient exactement, met en état d'assigner une ligne droite qui soit égale à l'arc dont il s'agit.

236. Prenons pour premier exemple les paraboles des divers degrés, et représentons leur équation par $y=px^n$, n étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire; nous aurons

$dy=npx^{n-1}dx$, $\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+n^2p^2x^{2n-2}}$: l'arc parabolique sera donc exprimé par

$$\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx.$$

Cette intégrale s'obtiendra sous une forme finie et algébrique, lorsque l'exposant $2n-2$ sera égal à l'unité ou s'y trouvera contenu un nombre exact de fois (169).

Supposons d'abord $2n-2=1$, il en résultera $n=\frac{1}{2}$, et

$$\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx=\frac{8}{27p^2}(1+\frac{9}{4}p^2x^2)^{\frac{3}{2}}+const.$$

la courbe proposée sera donnée par l'équation $y=px^{\frac{3}{2}}$, ou $y^2=p^2x^3$, et sera par conséquent la même que la parabole du troisième ordre, qui est la développée de la parabole ordinaire (99). Si on compte les arcs à partir du point où $x=0$, on aura

$$\frac{8}{27p^2}[(1+\frac{9}{4}p^2x^2)^{\frac{3}{2}}-1].$$

En faisant successivement $2n-2=\frac{1}{3}$, $=\frac{1}{5}$, etc. il viendra $n=\frac{4}{3}$, $\frac{7}{6}$ etc. ce qui montre que les paraboles représentées par les équations $y^4=p^4x^5$, $y^6=p^6x^7$ etc. sont rectifiables; à l'égard des autres on ne peut obtenir leurs arcs que par approximation.

Pour la parabole ordinaire, dans laquelle $n=2$, on a $\int(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, et par la formule ($B$) du n°. 171, on trouve

$$\int(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}};$$

et comme

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}}=\frac{1}{2p}l(2px+\sqrt{1+4p^2x^2})+const.(162),$$

il en résultera

$$\int(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2p}l(2px+\sqrt{1+4p^2x^2})+const$$

Telle est la valeur d'un arc quelconque de la para-

bole ordinaire ; on peut y supprimer la constante, en faisant commencer l'intégrale lorsque $x=0$.

L'arc des hyperboles données par l'équation $y=px^{-n}$, a pour expression $\int x^{-n-1}\mathrm{d}x(x^{2n+2}+n^2p^2)^{\frac{1}{2}}$, et ne peut s'obtenir que par approximation.

237. La différentielle de l'arc de cercle est $\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, lorsqu'on part de l'équation $y^2=a^2-x^2$ (85), et $\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-xx}}$, quand on emploie l'équation $y^2=2ax-x^2$; sous l'une et l'autre de ces formes, son intégrale ne peut s'obtenir que par approximation, et nous en avons déjà donné plusieurs développemens (179).

238. Passons à l'ellipse et prenons pour équation de cette courbe $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; la différentielle de son arc sera $\frac{\mathrm{d}x\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$: faisons pour plus de simplicité le grand axe $a=1$, et le quarré de l'excentricité $a^2-b^2=1-b^2=e^2$, nous aurons l'arc égal à $\int\frac{\mathrm{d}x\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. Déjà dans le n°. 180, nous avons trouvé une série qui donne la valeur approchée de cette intégrale lorsque e est très-petit, et qui conviendra aux ellipses peu applaties.

En supposant $x=1$, dans cette série, et mettant $\frac{\pi}{2}$ à la place de l'arc A qui est alors de 1^q,

il vient

$$\frac{1}{2}\pi\left(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1.1.1.3}{2\,2.4.4}e^4-\frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}e^6-\text{etc.}\right),$$

développement très-convergent lorsque e est une petite fraction.

239. L'équation de l'hyperbole étant

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

on a $\dfrac{dx\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a\sqrt{x^2-a^2}}$ pour la différentielle de son arc; faisant $a=1$, $a^2+b^2=1+b^2=e^2$, cet arc se trouve exprimé par $\displaystyle\int\frac{dx\sqrt{e^2x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$ et peut, dans le cas où e est très-près de l'unité, se développer en série par un procédé analogue à celui du n°. 180.

240. La différentielle de l'arc elliptique s'exprime d'une manière très-simple, au moyen de l'arc qui lui correspond dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Soit $EN=\varphi$, *fig.* 44, on aura FIG. 44.

$$CP=x=\sin\varphi,\qquad\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d\varphi$$

et par conséquent

$$d.BM=d\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}.$$

241. Il nous reste à parler des courbes transcendantes. L'équation de la cycloïde étant

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}}\ (102),$$

on en tire

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{dy\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-y}},$$

différentielle dont l'intégrale est

$$=-2\sqrt{2a(2a-y)}+const.$$

Mais il est évident que $\sqrt{2a(2a-y)}$ est l'expression de la corde mg, *fig.* 46, du cercle générateur; et comme la partie variable de l'intégrale s'évanouit au point K où $y=2a$, il s'ensuit qu'elle exprime l'arc MK; on a donc $MK=2mg$, $AK=2qg$, et par conséquent $AM=AK-MK=2(gq-mg)$: ces résultats s'accordent avec celui du n°. 103.

FIG. 46.

242. Pour donner un exemple de l'usage de la formule $\sqrt{u^2dt^2+du^2}$, qui exprime la différentielle de l'arc d'une courbe rapportée aux coordonnées polaires (110), nous prendrons les spirales dont l'équation est $u=At^n$, et nous aurons à intégrer la différentielle

$$dt\sqrt{A^2t^{2n}+n^2A^2t^{2n-2}}=At^{n-1}dt(t^2+n^2)^{\frac{1}{2}}$$

Lorsque $n=1$ on a seulement $A\,dt\,(t^2+n^2)^{\frac{1}{2}}$, différentielle de la même forme que celle de l'arc de la parabole ordinaire (236); d'où il suit que c'est à la rectification de cette courbe que se rapporte celle de la spirale d'Archimède.

Dans la spirale logarithmique on a $t=lu$, ce qui donne

$\sqrt{u^2\,dt^2+du^2}=du\sqrt{2}$; l'arc de cette courbe a donc pour expression $u\sqrt{2}+const.$ ou seulement $u\sqrt{2}$, en partant de l'origine des rayons vecteurs; et on voit

que quoiqu'il se trouve entre cette origine et un point quelconque de la courbe, une infinité de révolutions, elles ne composent cependant qu'une longueur finie, égale à la diagonale du quarré fait sur le rayon vecteur.

De la cubature des corps terminés par des surfaces courbes, et de la quadrature de leurs aires; de la rectification des courbes à double courbure.

243. Les surfaces courbes que les Géomètres ont considérées les premières sont celles de révolution, parce que les différentielles de leurs aires et des volumes qu'elles comprennent ont une expression plus simple que leurs analogues dans les surfaces courbes en général.

Soit u le volume du corps engendré par le segment AMP, *fig.* 48, d'une courbe quelconque AZ, tournant autour de l'axe AD pris dans son plan; il est évident que ce volume, terminé par le plan circulaire décrit par l'ordonnée $M'P$, est une fonction de l'abscisse $AP=x$. Si on prend $PP'=h$, que l'on mène une seconde ordonnée $M'P'$ et les droites MR et SM', parallèles à PP', on verra que le volume u s'accroît de celui que décrit le trapèze curviligne $PMM'P'$, en tournant autour de PP', et que ce dernier corps, compris entre les cylindres engendrés par les rectangles MP' et $M'P$, diffère d'autant moins de l'un et de l'autre que les points M et M' sont plus rapprochés, en sorte que la limite du rapport de ces trois corps est l'unité; on peut donc à la limite prendre le cylindre décrit par MP', pour le corps engendré par $PMM'P'$. Ce cylindre ayant pour base le cercle décrit par le rayon $PM=y$, son volume sera $\pi y^2 h$, en nommant π le rapport de la FIG. 48.

circonférence au diamètre, et on trouvera par le raisonnement du n°. 86 que $\frac{du}{dx}=\pi y^2$, d'où $u=\pi\int y^2 dx$. Lors donc qu'on aura l'équation de la courbe AMZ, on substituera pour y sa valeur en x, et l'intégration fera connoître le volume d'un segment quelconque du corps engendré par cette courbe.

244. Pour trouver la différentielle de l'aire du même corps, il faut observer que son accroissement, où l'aire décrite par l'arc MOM' qui s'approche sans cesse de sa corde MM', tend à se confondre avec l'aire du tronc de cône droit décrit par cette corde; et, en passant aux limites, on peut prendre l'un pour l'autre. Mais l'aire du tronc de cône droit décrit par MM', aura pour expression

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}MM'(2\pi MP+2\pi M'P')\\&=\pi MM'(MP+M'P');\end{aligned}$$

mettant pour MM' et $M'P'$, leurs valeurs

$$h\sqrt{1+(p+Ph)^2}, \qquad y+p\frac{h}{1}+\text{etc.}$$

formées n°. 86, on aura

$$\pi h\sqrt{1+(p+Ph)^2}\left(2y+p\frac{h}{1}\right),$$

et prenant la limite du rapport de cette quantité avec l'accroissement h, il viendra

$$2\pi y\sqrt{1+p^2},$$

d'où il suit que le coefficient différentiel de l'aire décrite par l'arc AM est égal à

$$2\pi y\sqrt{1+p^2}=2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

et que par conséquent $2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$ est la différentielle de cette aire.

On parvient sur-le-champ à cette expression, ainsi qu'à celle du n°. précédent, en regardant la courbe AMZ comme un polygone; car alors l'élément du volume est le cylindre décrit par le rectangle MP', et celui de l'aire est le tronc de cône décrit par le côté MM'.

245. Nous insisterons peu sur les applications, qui n'ont par elles-mêmes aucune difficulté. Si on prend l'équation à l'ellipse $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, on trouvera que le volume du corps qu'elle engendre en tournant autour de son grand axe, ou *l'ellipsoïde allongé*, est égal à $\frac{4\pi ab^2}{3}$, puisqu'un segment de ce corps a pour expression

$$\int\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2-\frac{x^3}{3}\right)+const.\ (243).$$

Quand $a=b$, le corps proposé devient une sphère, et l'expression de son volume est $\frac{4\pi a^3}{3}$, ainsi qu'on le trouve par la Géométrie élémentaire.

Si l'ellipse étoit rapportée à son centre, ou qu'on employât l'équation $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, on auroit le même résultat, en observant que pour embrasser le corps entier, il faudroit prendre l'intégrale depuis $x=a$ jusqu'à $x=-a$. Le volume du segment seroit alors

$$\int\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{3a^2}(3a^2x-x^3)+const.$$

et on auroit

$$\int \frac{2b\pi \,\mathrm{d}x \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a^2}$$

pour l'expression de son aire. Cette intégrale se rapporte facilement à l'aire du segment circulaire dont l'abscisse est x et le rayon $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$; lorsqu'on suppose $a=b$, elle se réduit à

$$\int 2a\pi \,\mathrm{d}x = 2a\pi x + const.$$

et donne, en la prenant depuis $x=a$, jusqu'à $x=-a$, $4\pi a^2$ pour l'aire totale de la sphère.

246. Considérons maintenant les surfaces courbes en général, en les rapportant à trois plans perpendiculaires entr'eux, au moyen des trois coordonnées $AP=x$, $PM'=y$, $M'M=z$, *fig.* 49. FIG. 49.

Le segment $APGMM'Q$, compris entre les trois plans $APM'Q$, $PM'MG$, $QM'MH$, respectivement parallèles à chacun des plans coordonnés, et la surface courbe proposée, est nécessairement une fonction des deux variables indépendantes x et y; il peut s'étendre successivement dans le sens de chacune d'elles, ou varier par rapport à toutes deux simultanément. En effet, si on suppose que y demeurant constant, x se change en $x+h=AP+Pp$, ce segment s'accroîtra de la tranche $PGMM'm'mpg$, et de la tranche $QHMM'n'nqh$, si l'on fait varier y seul de $Qq=k$. Enfin, si x et y deviennent simultanément

$$x+h=AP+Pp, \qquad y+k=AQ+Qq,$$

le même segment aura alors pour limites les plans $pN'Ng$, $qN'Nh$, et différera de son état primitif par les deux

tranches dont on vient de parler et par le prisme $M'm'N'n'nMmN$, qui n'est autre que la variation qu'éprouve la première tranche lorsque y se change en $y+k$, ou la seconde lorsque x devient $x+h$. Cela posé, soit u la fonction de x et de y, qui exprime le volume du segment $APGMM'Q$, $\frac{du}{dx}h$ désignera le premier terme du développement de la valeur de la tranche $PGMM'm'mpg$, ordonné suivant les puissances de h, et $\frac{du}{dy}k$ celui du développement de la valeur de la tranche $QHMM'n'nqh$, ordonné suivant les puissances de k; faisant varier la première par rapport à y, ou la seconde par x, on aura toujours $\frac{d^2u}{dxdy}hk$, pour le premier terme du développement de la valeur du prisme $M'm'N'n'nMmN$ (21).

Il est visible que ce prisme tend sans cesse vers le parallélépipède rectangle formé sur la base $M'm'N'n'$ et sur l'ordonnée $M'M$; et que la limite de leur rapport est l'unité; mais ce dernier corps est exprimé par zhk; le rapport de cette valeur à celle du rectangle $M'\tilde{N}$ est z: donc la limite du rapport de la valeur du prisme $M'm'N'n'nMmN$, à celle du même rectangle est $\frac{d^2u}{dxdy}=z$; et pour obtenir le segment $APGMM'Q$, il faut par l'intégration, remonter du coefficient différentiel $\frac{d^2u}{dxdy}$ à la fonction u.

247. Quoique le coefficient différentiel $\frac{d^2u}{dxdy}$ soit relatif à deux variables, on peut néanmoins parvenir

à la fonction dont il dérive, par les méthodes données pour l'intégration des fonctions d'une seule, parce que chacune de ces variables est regardée comme constante à son tour. En effet, à cause de $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$, on aura $\frac{d.\frac{du}{dx}}{dy} dy = z\,dy$; et prenant l'intégrale chaque membre, en ne considérant comme variable que y seul, il viendra $\frac{du}{dx} = \int z\,dy$, d'où on tirera

$$\frac{du}{dx} dx = dx \int z\,dy:$$

intégrant de nouveau, mais par rapport à x seulement, on trouvera $u = \int dx \int z\,dy$.

En ne considérant cette recherche que du côté purement analytique, il est évident que la constante qu'il faudra ajouter pour compléter la première intégrale, peut renfermer x d'une manière quelconque: que celle qu'on mettra à la suite de la seconde intégrale, doit être considérée comme une fonction quelconque de y; et cela, parce que toute fonction de x seul doit disparoître comme une constante lorsqu'on ne différentie que par rapport à y, et qu'il en est de même de toute fonction de y, lorsqu'on ne différentie que par rapport à x.

L'ordre des intégrations est indifférent (122). En nous occupant d'abord de la variable x, nous aurions eu $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d.\frac{du}{dy}}{dx}$; et de là nous aurions tiré

successivement $\frac{du}{dy}=\int z\,dx$, $\quad u=\int dy\int z\,dx$.

Ce résultat et le précédent s'écrivent comme il suit :

$$u=\iint z\,dy\,dx, \text{ et } u=\iint z\,dx\,dy,$$

en faisant passer les deux différentielles sous le dernier signe $\int$, ce qui est permis, lorsqu'on observe que chaque signe n'est relatif qu'à l'une des variables en particulier.

Pour éclaircir et confirmer ce qui précède, prenons $z=\frac{1}{x^2+y^2}$, et nous aurons

$$u=\iint\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}=\int dx\int\frac{dy}{x^2+y^2}=\int dy\int\frac{dx}{x^2+y^2}.$$

La première succession d'intégrales donne

$$\int\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x}\text{ arc }\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)+X',$$

résultat dans lequel X' représente une fonction arbitraire de x, ajoutée pour compléter l'intégrale ; en intégrant de nouveau par rapport à x, et faisant $\int X'\,dx=X$, on trouve

$$\int dx\int\frac{dy}{x^2+y^2}=\int dx\left[\frac{1}{x}.\text{ arc }\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)+X'\right]$$
$$=\int\frac{dx}{x}\text{arc }\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)+X.$$

L'intégrale $\int\frac{dx}{x}\text{ arc }\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)$ s'obtient en série, en mettant au lieu de arc $\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)$ son développement $\frac{y}{x}-\frac{y^3}{3x^3}+\frac{y^5}{5x^5}-$ etc. (177) ; et comme il faut, après cette intégration, ajouter une fonction

arbitraire de y, en la désignant par Y, on aura enfin

$$\iint\frac{dxdy}{x^2+y^2}=X+Y-\frac{y}{x}+\frac{y^3}{9x^3}-\frac{y^5}{25x^5}+\frac{y^7}{49x^7}-\text{etc.}$$

En opérant dans un ordre inverse, d'après la seconde succession d'intégrales, on trouvera

$$\int\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{y}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{y}\right)+Y',$$

$$\int dy\int\frac{dx}{x^2+y^2}=\int dy\left[\frac{1}{y}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{y}\right)+Y'\right]$$

$$=\int\frac{dy}{y}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{y}\right)+Y;$$

mais si l'on observe que

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{y}\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right),$$

on aura, après la dernière intégration et l'addition d'une fonction arbitraire de x,

$$\iint\frac{dxdy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}\,ly-\int\frac{dy}{y}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right)+Y+X,$$

et comme on peut comprendre le terme $\frac{\pi}{2}\,ly$ dans la fonction arbitraire Y, ce résultat, qui se changera par là en

$$\iint\frac{dxdy}{x^2+y^2}=X+Y-\int\frac{dy}{y}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right),$$

sera le même que le précédent, ainsi qu'on peut s'en convaincre en mettant pour $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right)$ son développement.

248. Lorsque l'on regarde $\int\int z\,dx\,dy$ comme exprimant le volume d'un corps, il faut avoir égard aux limites entre lesquelles doit être prise chaque intégrale, et qui tiennent à la nature des surfaces par lesquelles le corps proposé est terminé latéralement.

Le cas le plus simple est celui où le corps est fermé par quatre plans, parallèles deux à deux aux plans coordonnés CAD, BAD. En supposant que les premiers répondent aux abscisses $x=a$, $x=a'$, et les secondes aux abscisses $y=b$, $y=b'$, on prendra l'intégrale $\int z\,dx$, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a'$, en y regardant d'ailleurs y comme constant; et nommant P le résultat obtenu, il restera à prendre l'intégrale $\int P\,dy$, depuis $y=b$, jusqu'à $y=b'$.

Lorsque le corps proposé est terminé latéralement par des surfaces courbes, les valeurs extrêmes de l'une des variables sont liées avec celles de l'autre, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant, où il s'agit de trouver le volume d'une sphère dont le centre est en A et dont le rayon est égal à r.

On a $x^2+y^2+z^2=r^2$, et par conséquent

$$\int\int z\,dx\,dy=\int\int dx\,dy\sqrt{r^2-x^2-y^2};$$

on trouve d'abord, en supposant y constant,

$$\int z\,dx=\int dx\sqrt{r^2-x^2-y^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

$$+\frac{1}{2}(r^2-y^2)\,\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}\right).$$

Ici la valeur extrême de x est représentée par QF, ordonnée du cercle $BFEC$, suivant lequel la sphère rencontre le plan BAC; et si le volume cherché doit être terminé du côté opposé, par le plan CAD, il est

évident que l'intégrale ci-dessus devra être prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=QF$. Mais QF est liée avec AQ, car en faisant $z=0$, on trouve $x^2+y^2=r^2$ pour l'équation du cercle $BFEC$, d'où il suit que $QF=\sqrt{r^2-AQ^2}$; et par conséquent, pour une valeur quelconque de y, les valeurs extrêmes de x sont $x=0$ et $x=\sqrt{r^2-y^2}$.

Le résultat que nous avons obtenu plus haut se réduit à $\frac{\pi}{4}(r^2-y^2)$, puisque arc $(\sin=1)=\frac{\pi}{2}$, et l'intégrale $\int dy \int z\,dx$ devient

$$\frac{\pi}{4}\int dy\,(r^2-y^2)=\frac{\pi}{4}\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right);$$

cette dernière doit être prise depuis la plus grande valeur de y, qui dans le cas actuel est $AC=r$, jusqu'à la plus petite, que nous supposerons nulle en fermant de ce côté le corps par le plan BAD. Le volume du segment $ABCD$, qui est la huitième partie de la sphère, sera donc $\frac{\pi r^3}{6}$; et par conséquent le volume de la sphère entière sera $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Il est à propos de remarquer que nous aurions pu obtenir immédiatement le volume de tout l'hémisphère supérieur au plan BAC, en prenant la première intégrale depuis $x=+\sqrt{r^2-y^2}$, jusqu'à $x=-\sqrt{r^2-y^2}$; car dans ce cas les valeurs extrêmes de x se terminent de part et d'autre à la circonférence du cercle $BFBC$, dont AC est le diamètre, et on a la valeur complète de $\int z\,dx=\frac{\pi}{2}(r^2-y^2)$. Prenant ensuite

suite $\int dy \int z dx = \frac{\pi}{2}\left(r^2 y - \frac{y^3}{3}\right)$, depuis $y = r$, jusqu'à $y = -r$, c'est-à-dire, depuis l'extrémité C du diamètre du cercle BEC, jusqu'à l'autre extrémité qui tombe derrière le plan BAD, on trouve $\frac{2\pi r^3}{3}$, et en doublant on a, comme ci-dessus, $\frac{4\pi r^3}{3}$ pour la sphère entière.

249. En considérant les différentielles comme les accroissemens infiniment petits des variables ou des fonctions dont elles dérivent, il est évident que la valeur complète de $dy \int z dx$ est l'expression de la tranche $FHQqhf$, comprise entre deux plans parallèles au plan ABD des x et z; mais $\int z dx$ étant l'aire de la section FHQ, il s'ensuit que la tranche infiniment mince $FHQqhf$ peut être regardée comme égale à $FHQ \times Qq$, c'est-à-dire, à l'aire de la courbe qui lui sert de base, multipliée par l'épaisseur Qq. On voit enfin que $\int dy \int z dx$ exprime la somme de toutes les tranches semblables comprises dans le volume cherché.

250. En général, s'il faut déterminer la portion du corps proposé, terminée latéralement par le cylindre élevé perpendiculairement au plan ABC, *fig.* 50, sur la courbe donnée $E'N'G'$, on prendra l'intégrale $\int z dx$, depuis $x = AP$, jusqu'à $x = Ap$, afin que l'expression $dy \int z dx$ devienne celle de la tranche $MM'N'Nnn'm'm$. Les lignes AP et Ap, respectivement égales à QM' et QN' seront données en fonction de $AQ = y$, par l'équation de la courbe $E'N'G'$ dont elles sont les abscisses; en FIG. 50.

l'aire de la zone $FHhf$, *fig.* 49, et qu'on a

$$s=\int dy\int dx\sqrt{1+p^2+q^2}=\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

252. L'application de l'Analyse à la Mécanique conduit souvent à des intégrales de la forme $\iiint V dx dy dz$, qu'on appelle *intégrales triples*, par analogie avec celles de la forme $\iint V dx dy$, désignées sous le nom d'*intégrales doubles*; dans les premières, la fonction V peut renfermer les trois variables x, y, z, considérées comme indépendantes les unes des autres, en sorte que chaque signe d'intégration ne tombe que sur une d'elles en particulier. Il est aisé de voir que ces intégrales proviennent de la détermination d'une fonction u, dépendante des trois variables x, y, z, et dont on ne connoît que le coefficient différentiel $\frac{d^3u}{dxdydz}$ donné par l'équation $\frac{d^3u}{dxdydz}=V$; car on tire delà, en opérant comme dans le n°. 247, 1°. en regardant x et y comme constans

$$\frac{d^3u}{dxdydz}dz=d.\frac{d^2u}{dxdy}=V dz,\quad \frac{d^2u}{dxdy}=\int V dz+T',$$

T' étant une fonction arbitraire de x et de y; 2°. en regardant x et z comme constans

$$\frac{d^2u}{dxdy}dy=d.\frac{du}{dx}=dy\int V dz+T'dy,\quad \frac{du}{dx}=\int dy\int V dz+T+S,$$

T désignant la fonction arbitraire de x et de y, résultante de $\int T'dy$, et S une fonction arbitraire de x et de z; 3°. enfin, en regardant y et z comme constans

$$\frac{du}{dx}dx=du=dx\int dy\int V dz+T dx+S dx$$
$$=\int dx\int dy\int V dz+T+S+R,$$

T et S représentant des fonctions arbitraires résultantes de $\int T\mathrm{d}x$ et de $\int S'\mathrm{d}x$, et R étant une fonction arbitraire de y et de z : l'intégrale complète renferme donc trois fonctions arbitraires, savoir : une de x et de y, une de x et de z; et une de y et de z. En réunissant les différentielles sous le dernier signe d'intégration, $\int\mathrm{d}z\int\mathrm{d}y\int V\mathrm{d}x$ devient $\iiint V\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, et u sous cette dernière forme la même signification que sous la précédente.

Cet exemple suffit pour montrer comment on reviendra du coefficient différentiel d'un ordre quelconque d'une fonction de plusieurs variables à cette fonction elle-même. Les fonctions arbitraires introduites ici n'ont rapport, comme dans le n°. 247, qu'au cas où les intégrales sont prises entre des limites pour lesquelles les variables x, y et z sont indépendantes les unes des autres; mais il arrive le plus souvent que l'intégrale relative à z doit être prise depuis $z=F(x,y)$, jusqu'à $z=f(x,y)$, F et f étant des fonctions données, l'intégrale relative à y depuis $y=F_1(x)$, jusqu'à $y=f_1(x)$, et enfin l'intégrale relative à x, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a'$.

De l'intégration des équations différentielles à deux variables.

De la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre.

253. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les coefficiens différentiels étoient exprimés immédiatement par le moyen de la variable d'où dépend leur fonction primitive; mais le plus souvent on n'a qu'une

équation différentielle qui renferme ces diverses quantités. Pour le premier ordre l'équation différentielle, lorsqu'elle est du premier degré par rapport à dx et à dy, a nécessairement la forme $M\,dx+N\,dy=0$, et elle exprime, ainsi qu'on l'a fait voir n°. 38, une relation entre la variable x, la fonction y et son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$.

Le moyen qui s'est offert le premier aux Analystes pour découvrir l'équation primitive dont celle-ci tire son origine, a été de chercher à séparer les variables, c'est-à-dire, à ramener l'équation $Mdx+Ndy=0$ à la forme $Xdx+Ydy=0$, X étant une fonction de x seul et Y une fonction de y seul. En effet, lorsqu'on est parvenu à ce point, les termes $X\,dx$ et $Y\,dy$ s'intégrent par les méthodes enseignées précédemment, et on a $\int X\,dx+\int Y\,dy=C$, C désignant une constante arbitraire.

254. Pour donner un exemple des cas où l'équation différentielle se présente immédiatement sous la forme ci-dessus, soit $x^m\,dx+y^n\,dy=0$; on trouvera sur le champ $\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{y^{n+1}}{n+1}=C$.

Si l'équation proposée étoit $y\,dx-x\,dy=0$, la séparation seroit facile à effectuer, car on voit qu'en divisant par xy, on trouveroit $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$; prenant séparément l'intégrale de chaque terme de cette dernière, on auroit $lx-ly=C$, ou $l\frac{x}{y}=C$, et puisque l'on peut regarder la constante arbitraire

comme un logarithme, on en concluroit $l\frac{x}{y} = l\,c$: en passant aux nombres il viendroit $\frac{x}{y} = c$, ou $x = c\,y$.

Après cet exemple on reconnoît sans peine que la séparation des variables s'effectuera de la même manière dans les équations $Ydx - Xdy = 0$, $XY_1dx - YX_1dy = 0$; car la première donne $\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} = 0$,

et la seconde $\frac{Xdx}{X_1} - \frac{Ydy}{Y_1} = 0$.

En général, si lorsqu'on prend la valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation proposée, on trouve $\frac{dy}{dx} = XY$, il est facile d'en tirer $X\,dx - \frac{1}{Y}\,dy = 0$,

et par conséquent

$$\int X\,dx - \int \frac{1}{Y}\,dy = C.$$

255. Il y a encore un cas très-étendu où l'on sépare facilement les variables, c'est lorsque M et N sont des fonctions *homogènes* de x et de y. Nous ferons connoître à cette occasion une propriété remarquable des fonctions *homogènes;* c'est que *si on a une fonction algébrique des quantités* x, y, z, *etc. dans laquelle la somme des exposans de chacune de ces lettres soit la même pour tous les termes, et égale à* m, *et qu'on substitue* Px à y, Qx à z, *etc. le résultat sera divisible par* x^m. En effet un terme quelconque de cette fonction étant de la forme $A\,x^n\,y^p\,z^q$ etc. deviendra par la substitution indiquée $AP^pQ^q\ldots\ldots x^{n+p+q+\text{etc.}}$; mais par l'hypothèse on a dans tous les termes

mes $n+p+q+\text{etc}\ldots\ldots=m$, donc x^m sera facteur commun. Il suit de là que si la fonction proposée étoit égalée à zéro, ou bien qu'elle fût une fraction ayant pour numérateur et pour dénominateur deux polynomes homogènes du même degré, la quantité x disparoîtroit entièrement du résultat.

D'après ce qui précède, il suffit de faire $y=xz$, pour séparer les variables dans l'équation $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$; en effet, les fonctions M et N prennent la forme Zx^m, Z_1x^m, Z et Z_1 ne renfermant que la nouvelle variable z, et comme $\mathrm{d}y=z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z$, il vient en divisant par x^m, $Z\mathrm{d}x+Z_1(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z)=0$, résultat qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{Z_1\mathrm{d}z}{Z+zZ_1}=0,$$

et dont on tire

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{Z_1\mathrm{d}z}{Z+zZ_1}=C.$$

Appliquons d'abord cette transformation à l'équation $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=n y\mathrm{d}x$, qui devient $(x-ny)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$. En passant tous les termes dans un membre, nous aurons $Z=1-nz$, $Z_1=z$ et $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{z\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}=C$, ou $lx+\int\frac{z\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}=C$: l'intégrale $\int\frac{z\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}$ dépendra des logarithmes si $\frac{n}{2}>1$, des arcs de cercle si $\frac{n}{2}<1$, et sera algébrique si $\frac{n}{2}=1$. On peut la simplifier en observant que

$$\frac{z\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}=\frac{1}{2}\frac{2z\mathrm{d}z-n\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}+\frac{1}{2}\frac{n\mathrm{d}z}{1-nz+z^2},$$

car il vient alors

$$lx+\frac{1}{2}l(1-nz+z^2)+\frac{1}{2}\int\frac{ndx}{1-nz+z^2}=C.$$

Nous ne rapporterons ici que le résultat qu'on obtient quand $\frac{n}{2}=1$, ou $n=2$: dans ce cas $\int\frac{n\,dz}{1-nz+z^2}$ devient

$$\int\frac{2dz}{(1-z)^2}=\frac{2}{1-z},\ l(1-nz+z^2)=l(1-z)^2$$

et on a par conséquent $lx+l(1-z)+\frac{1}{1-z}=C$, ou $l(x-y)+\frac{x}{x-y}=C$, en remettant pour z sa valeur $z=\frac{y}{x}$; ou enfin $x-y=ce^{-\frac{x}{x-y}}$, en substituant lc à C et passant aux nombres.

Proposons-nous encore d'intégrer l'équation

$$x\,dy-y\,dx=dx\sqrt{x^2+y^2}.$$

En faisant $y=xz$, et divisant par x tous ses terme réunis dans un seul membre, on trouvera

$$dx\sqrt{1+z^2}-x\,dz=0,$$

ce qui donnera

$$\frac{dx}{x}-\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=0;$$

on obtiendra ensuite, par l'intégration de chaque terme en particulier,

$$lx-l(z+\sqrt{1+z^2})=lc,\text{ ou }lx=lc+l(z+\sqrt{1+z^2})$$

remettant pour z sa valeur $\frac{y}{x}$, il viendra

$$lx = lc + l\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right),$$

résultat qu'on changera facilement en

$$lx = lc + l\left(\frac{-x}{y-\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

et passant aux nombres on aura $y-\sqrt{x^2+y^2}=-c$; faisant disparoître le radical, on aura enfin $x^2=c^2+2cy$.

256. L'équation

$$(a+mx+ny)\,dx+(b+px+qy)\,dy=0$$

peut facilement être rendue homogène. En substituant $t+\alpha$, à la place de x, et $u+\beta$ à celle de y, on a $dx=dt$, $dy=du$, et

$(a+m\alpha+n\beta+mt+nu)dt+(b+p\alpha+q\beta+pt+qu)du=0$;

on fera disparoître les termes constans, en posant les équations $a+m\alpha+n\beta=0$, $b+p\alpha+q\beta=0$, au moyen desquelles on déterminera les quantités α et β, et il restera alors l'équation différentielle

$$(mt+nu)\,dt+(pt+qu)\,du=0,$$

homogène par rapport aux nouvelles variables u et t.

La transformation que nous venons d'effectuer est la même que celle dont on se sert pour changer l'origine des coordonnées sur un plan (*Trig.* 112); elle ne donne aucun résultat quand $mq-np=0$, cas auquel les valeurs de α et de β deviennent infinies; mais alors on a $q=\frac{np}{m}$, et par conséquent

$$px+qy=\frac{p}{m}(mx+ny);$$

l'équation proposée se change en

$$a\,dx+b\,dy+(mx+ny)\left(dx+\frac{p}{m}dy\right)=0.$$

Il suffit de faire $mx+ny=z$ pour y séparer les variables.

En substituant cette valeur, ainsi que celle de dy, qui en résulte, et dégageant dx, on trouve

$$dx+\frac{(bm+pz)\,dz}{amn-bm^2+(mn-pm)z}=0;$$

l'intégrale de cette équation renfermera des logarithmes, excepté dans le cas de $mn-pm=0$, où elle sera

$$x+\frac{2b\,mz+pz^2}{2(amn-bm^2)}=C.$$

La transformation employée dans ce dernier cas a changé l'équation proposée en une autre qui ne contient plus qu'une des variables; et il est facile de voir que, quelle que soit l'équation sur laquelle on ait produit cet effet, on pourra lui donner la forme $dx+Z\,dz=0$, Z étant une fonction de z seul, et qu'on en tirera $x+\int Z\,dz=C$.

257. La séparation des variables s'opère d'une manière très-simple sur l'équation $dy+Py\,dx=Q\,dx$, dans laquelle P et Q désignent des fonctions quelconques de x. En y substituant Xz et $z\,dX+X\,dz$, au lieu de y et de dy, elle devient

$$z\,dX+X\,dz+PXz\,dx=Q\,dx.$$

La quantité X étant considérée comme une fonction indéterminée de x, il est permis d'en disposer pour partager l'équation précédente en deux autres où les variables puissent se séparer; or il est facile de voir que

cette condition sera remplie si on fait $Xdz+PXzdx=0$; ce qui donne $zdX=Qdx$. En divisant la première de ces équations par X, elle se réduit à $dz+Pzdx=0$; on en tire $\frac{dz}{z}+Pdx=0$, $lz+\int Pdx=0$, et en passant aux nombres, $z=e^{-\int Pdx}$: on néglige ici la constante arbitraire, parce qu'il suffira d'en ajouter une à la fin de l'opération. Prenant ensuite la valeur de dX dans la seconde équation, après y avoir substitué celle de z que l'on vient de trouver, on aura

$$dX=e^{\int Pdx}Qdx, \quad X=\int e^{\int Pdx}Qdx+C,$$

et par conséquent

$$y=e^{-\int Pdx}\left(\int e^{\int Pdx}Qdx+C\right).$$

L'équation $dy+Pydx=Qdx$ est remarquable parce que la variable y et sa différentielle ne s'y trouvent qu'au premier degré, et on l'appelle, à cause de cette circonstance, *équation linéaire* du premier ordre, dénomination que j'ai cru devoir changer dans celle *d'équation du premier degré et du premier ordre* (*).

258. Les premiers Analystes qui se sont occupés du Calcul intégral classoient les équations différentielles par le nombre de leurs termes. Dans celles qui n'en ont que deux et dont la forme est par conséquent $\beta u^s z^h dz=\alpha u^e z^f du$, les variables se séparent sur le champ, puisqu'on en tire $\beta z^{h-f}dz=\alpha u^{e-s}du$;

(*) Le mot *linéaire* est impropre; il est relatif à la Géométrie, et en l'appliquant aux équations, on a eu en vue la ligne droite, dans l'équation de laquelle l'ordonnée et l'abscisse ne se trouvent qu'au premier degré: on ne sauroit donc regarder comme linéaires des équations telles que $dy+Pydx=Qdx$, qui appartiennent le plus souvent à des courbes transcendantes.

mais il n'en est pas de même des équations à trois termes, comprises dans la formule

$$\gamma u^i z^k \,dz + \beta u^g z^h \,du = \alpha u^e z^f \,du.$$

On peut lui donner une forme plus simple en divisant tous ses termes par $\gamma u^i z^f$; elle deviendra

$$z^{k-f}dz + \frac{\beta}{\gamma} u^{g-i} z^{h-f} du = \frac{\alpha}{\gamma} u^{e-i}\,du,$$

supposant ensuite

$$z^{k-f}dz = \frac{dy}{k-f+1}, \qquad u^{g-i}du = \frac{dx}{g-i+1},$$

on a

$$z^{k-f+1} = y, \qquad u^{g-i+1} = x$$

et

$$dy + \frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma} y^{\frac{h-f}{k-f+1}} dx = \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma} x^{\frac{e-i}{g-i+1}} dx:$$

en faisant pour abréger

$$\frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma} = b, \qquad \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma} = a,$$
$$\frac{h-f}{k-f+1} = n, \qquad \frac{e-i}{g-i+1} = m,$$

il en résultera l'équation $dy + by^n dx = ax^m dx$.

259. Le cas le plus simple, après celui qui rentre dans l'équation du premier degré, est celui où $n=2$. On tombe alors sur l'équation $dy + by^2 dx = ax^m dx$, traitée pour la première fois par Riccati, Géomètre italien, dont elle a conservé le nom.

Les variables se séparent immédiatement dans cette équation lorsque $m=0$; elle devient $dy+by^2dx=adx$, et donne

$$dx = \frac{dy}{a-by^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{dy}{\sqrt{a}+y\sqrt{b}} + \frac{dy}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right].$$

On trouve, en intégrant,

$$x=\frac{1}{2\sqrt{ab}}l\left(\frac{\sqrt{a}+y\sqrt{b}}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right)+C.$$

Pour chercher à rendre la même équation homogène, faisons $y=z^k$; elle se changera en

$$kz^{k-1}dz+bz^{2k}dx=ax^m dx,$$

et prendra la forme demandée, si $k-1=2k=m$, ce qui donne $k=-1$, et suppose qu'on ait $m=-2$; il vient alors

$$-\frac{dz}{z^2}+\frac{b\,dx}{z^2}=\frac{a\,dx}{x^2}.$$

Nous ne nous arrêterons point à l'intégration de cette dernière équation, et nous essayerons une transformation plus générale, celle qui résulte de $y=Ax^p+x^qz$. On trouve dans cette hypothèse

$$dy=(pAx^{p-1}+qx^{q-1}z)dx+x^q dz$$
$$y^2dx=(A^2x^{2p}+2Ax^{p+q}z+x^{2q}z^2)dx$$

et par conséquent

$$x^q dz+(qx^{q-1}+2bAx^{p+q}+bx^{2q}z)z\,dx$$
$$+(pAx^{p-1}+bA^2x^{2p})dx=ax^m dx.$$

Cette équation se réduira elle-même à trois termes, si on a les suivantes

$p-1=2p$, $pA+bA^2=0$, $q-1=p+q$, $q+2bA=0$.

La première et la troisième s'accordent à donner $p=-1$, on tire de la seconde et de la quatrième $A=\frac{1}{b}$, $q=-2$, valeurs qui conduisent à $y=\frac{1}{bx}+\frac{z}{x^2}$,

$$x^{-2}dz+bx^{-4}z^2dx=ax^m dx,$$

$$\text{ou } dz+bz^2\frac{dx}{x^2}=ax^{m+2}dx.$$

Nous voyons encore par ce moyen que l'équation proposée sera réductible à l'homogénéité, si $m=-2$, et nous apprenons de plus qu'on y pourra séparer les variables si $m=-4$, puisqu'elle prendra la forme

$$dz+(bz^2-a)\frac{dx}{x^2}=0, \text{ ou } \frac{dz}{bz^2-a}+\frac{dx}{x^2}=0.$$

Si dans l'équation $dz+bz^2\frac{dx}{x^2}=ax^{m+2}dx$, nous faisons $z=\frac{1}{y'}$, nous aurons

$$-dy'+b\frac{dx}{x^2}=ay'^2x^{m+2}dx, \text{ ou } dy'+ay'^2x^{m+2}dx=b\frac{dx}{x^2};$$

posant ensuite $x^{m+2}dx=\frac{dx'}{m+3}$, nous trouverons

$$x^{m+3}=x', \quad dx=\frac{1}{m+3}x'^{-\frac{m+2}{m+3}}dx',$$

et $$dy'+\frac{a}{m+3}y'^2dx'=\frac{b}{m+3}x'^{-\frac{m+4}{m+3}}dx', \text{ ou}$$

$dy'+a'y'^2dx'=b'x'^{m'}dx'$, en faisant pour abréger

$$\frac{a}{m+3}=a'. \quad \frac{b}{m+3}=b' \text{ et } \frac{-m-4}{m+3}=m'.$$

Appliquons maintenant à cette équation l'avant-dernière transformation, c'est-à-dire, faisons

$$y'=\frac{1}{a'x'}+\frac{z'}{x'^2},$$

puisque a' a pris la place de b; nous la changerons en

$$dz'+a'z'^2\frac{dx'}{x'^2}=b'x'^{m'+2}dx',$$

dans laquelle la séparation des variables pourra encore s'effectuer si $m'=-4$, ce qui revient à $m=-\frac{8}{3}$.

Si l'on fait encore

$$z'=\frac{1}{y''},\ x'^{m'+2}\mathrm{d}x'=\frac{\mathrm{d}x''}{m+3},\ \frac{b'}{m'+3}=b'',$$
$$\frac{a'}{m'+3}=a'',\ \frac{-m'-4}{m'+3}=m'',$$

dans l'équation

$$\mathrm{d}z'+a'z'^{2}\frac{\mathrm{d}x'}{x'^{2}}=b'x'^{m'+2}\mathrm{d}x',$$

elle deviendra $\mathrm{d}y''+b''y''^{2}\mathrm{d}x''=a''x''^{m''}\mathrm{d}x''$, et se changera ensuite en

$$\mathrm{d}z''+b''z''^{2}\frac{\mathrm{d}x''}{x''^{2}}=a''x''m''+2\,\mathrm{d}x'',$$

par la substitution de $\frac{1}{b''x''}+\frac{z''}{x''^{2}}$, au lieu de y''. Les variables se sépareront dans ce cas, si $m''=-4$, c'est-à-dire, si $m'=-\frac{8}{3}$, ou $m=-\frac{14}{5}$.

En suivant cet enchaînement de transformations, on parviendra à séparer les variables de l'équation proposée, dans les cas où

$m=0$, $m=-4$, $m=-\frac{8}{3}$, $m=-\frac{14}{5}$, $m=-\frac{16}{7}$, etc.

valeurs qui sont comprises dans la formule

$$m=-\frac{4i}{2i-1},$$

i étant un nombre entier positif quelconque.

260. On peut effectuer les transformations dans un ordre inverse ; faire d'abord dans la proposée $y=\frac{1}{y'}$, ce qui donnera $\mathrm{d}y'+ay'^{2}x^{m}\mathrm{d}x=b\mathrm{d}x$, et poser $x^{m}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x'}{m+1}$, d'où il résultera

$$\mathrm{d}y'+\frac{a}{m+1}y'^{2}\mathrm{d}x'=\frac{b}{m+1}x'^{\frac{-m}{m+1}}\mathrm{d}x',$$

ou

ou $$dy' + a'y'^2 dx' = b'x'^{m'} dx'.$$

Changeant ensuite dans la dernière transformée y' en

$$\frac{1}{a'x'} + \frac{z'}{x'^2},$$

on arrivera à l'équation

$$dz' + a'z'^2 \frac{dx'}{x'^2} = b'x'^{m'+2} dx',$$

dont on séparera les variables lorsque $m' = -4$, et ce cas répond à $m = -\frac{4}{3}$. Faisant sur cette dernière équation les mêmes transformations et dans le même ordre que sur sa correspondante du n°. précédent, on sera conduit à

$$dz'' + b''z''^2 \frac{dx''}{x''^2} = a''x''^{m''+2} dx'',$$

où les variables se sépareront, si

$m'' = -4$, d'où $m' = -\frac{8}{3}$, ou $m = -\frac{8}{5}$.

En continuant ainsi on obtiendra la séparation pour les cas où

$m = -\frac{4}{3}$, $m = -\frac{8}{5}$, $m = -\frac{12}{7}$, $m = -\frac{16}{9}$, etc.

et qui sont compris dans la formule $m = -\frac{4i}{2i+1}$.

Il suit donc delà que l'équation de Riccati pourra s'intégrer toutes les fois que l'exposant m sera de la forme $\frac{-4i}{2i \pm 1}$.

Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre.

261. On pourroit multiplier davantage les exemples; mais toutes ces équations particulières, d'une forme

bizarre le plus souvent, ne se rencontrant jamais dans les applications, n'offrent aucun intérêt. Nous passerons donc à une autre méthode due à Euler, et qui consiste à multiplier par un facteur convenable les équations différentielles que l'on se propose d'intégrer.

Il faut se rappeler qu'une équation différentielle n'est pas toujours le produit immédiat de la différentiation d'une fonction de deux variables, mais qu'elle résulte en général de l'élimination d'une constante arbitraire, entre l'équation primitive dont elle tire son origine, et la différentielle immédiate de cette équation (43).

L'élimination s'effectue sur le champ lorsque l'équation primitive est sous la forme $u=c$, u désignant une fonction quelconque de x et de y; car, en différentiant, on a $du=0$. Si la fonction du n'a aucun facteur par lequel elle ait pu être divisée, elle conservera toujours la forme de différentielle exacte à deux variables; et l'équation $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydx}$ nous fournit le moyen de reconnoître cette forme: car quand on a

$$du=M\,dx+N\,dy,$$

il en résulte

$$\frac{du}{dx}=M,\frac{du}{dy}=N,\ \frac{d^2u}{dxdy}=\frac{dM}{dy},\ \frac{d^2u}{dydx}=\frac{dN}{dx}$$

et par conséquent $$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}.$$

Il faudra donc que toute fonction $M\,dx+N\,dy$, lorsqu'elle sera une différentielle exacte, rende identique l'équation ci-dessus; et lorsque cette condition sera remplie, il sera facile de remonter à son inté-

grale, puisqu'alors on aura $M=\frac{du}{dx}$, $N=\frac{du}{dy}$, et que l'on en déduira la valeur des différentielles partielles. En prenant celle de la différentielle relative à x, par exemple, il viendra $\frac{du}{dx}dx=M\,dx$, et par conséquent $u=\int M\,dx+Y$. On ajoute dans ce cas, comme dans celui du n°. 247, une fonction arbitraire de y, puisque l'intégration n'a eu lieu que par rapport à l'une des variables; mais ici cette fonction se détermine, parce que la fonction u doit satisfaire à l'équation $N=\frac{du}{dy}$.

L'équation $u=\int M\,dx+Y$ donne

$$\frac{du}{dy}=\frac{d\int M\,dx}{dy}+\frac{dY}{dy};$$

représentant $\int M\,dx$ par v, on aura

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dy}+\frac{dY}{dy}=N,$$

d'où on tirera

$$\frac{dY}{dy}=N-\frac{dv}{dy},$$

et en intégrant,

$$Y=\int\left(N-\frac{dv}{dy}\right)dy,$$

on trouvera donc

$$u=\int M\,dx+\int\left(N-\frac{dv}{dy}\right)dy:$$

telle est l'intégrale de la fonction proposée.

Ce résultat nous fait voir que la fonction $N-\frac{dv}{dy}$ ne doit renfermer que la seule variable y, sans quoi il ne seroit pas vrai, comme on l'a supposé, que $M\,dx$ et $N\,dy$ fussent les différentielles partielles

d'une même fonction u; en le développant il nous conduira à l'équation de condition $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$, trouvée précédemment par une considération inverse.

Il est évident que pour obtenir $\frac{dv}{dy}=\frac{d\int M dx}{dy}$, il faut substituer $y+dy$ dans la fonction $\int M dx$, qui deviendra alors

$$\int\left(M+\frac{dM}{dy}dy+\text{etc.}\right)dx=\int M dx+$$

$$\int\frac{dM}{dy}dx\,dy+\text{etc.}=\int M dx+dy\int\frac{dM}{dy}dx+\text{etc.}$$

puisque le signe $\int$ n'est relatif qu'à la variable x; on aura donc

$$\frac{d\int M dx}{dy}=\int\frac{dM}{dy}dx:$$

substituant cette valeur de $\frac{dv}{dy}$, dans $Y=\int\left(N-\frac{dv}{dy}\right)dy$, il viendra

$$Y=\int\left(N-\int\frac{dM}{dy}dx\right)dy.$$

En prenant les différentielles, d'abord par rapport à y, on trouvera

$$dY=N-\int\frac{dM}{dy}dx,$$

et différentiant ensuite par rapport à x, on aura enfin

$$\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}=0\ (*).$$

(*) L'équation $\frac{d\int M dx}{dy}=\int\frac{dM}{dy}dx$, renferme le théorème donné par Léibnitz pour différentier sous le signe $\int$. Il appeloit ce

262. La fonction $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ étant écrite ainsi :

$$\mathrm{d}u=\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

donne successivement

$$M=\frac{y}{x^2+y^2},\quad N=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}$$

$$\int M\mathrm{d}x=\int\frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int\frac{\frac{\mathrm{d}x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}},$$

$$=\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x}{y}\right)$$

d'où $$u=\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}\frac{x}{y}\right)+Y.$$

Différentiant en faisant tout varier, on trouvera

$$\mathrm{d}u=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\mathrm{d}Y;$$

---

procédé *differentiatio de curvâ in curvam*, parce que dans la question qu'il se proposoit de résoudre, il passoit d'une courbe à une autre de la même espèce, en faisant varier une constante.

Le théorème de Léibnitz peut se déduire immédiatement de l'équation $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}$, puisque si on fait $u=\int M\mathrm{d}x$; on aura

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=M,\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y};$$

et intégrant par rapport à x, on trouvera

$$\int\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\int\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x.$$

comparant avec la fonction proposée, on aura

$$dY=0, \text{ d'où } Y=const.$$

et par conséquent

$$\int\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=\text{arc}\left(\text{tang}\frac{x}{y}\right)+const.$$

Soit encore l'équation

$$\frac{dx}{x}+\frac{y^2\,dx}{x^3}-\frac{y\,dy}{x^2}+\frac{(y\,dx-x\,dy)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{dy}{2y}=0.$$

En la comparant avec la formule $M\,dx+N\,dy=0$ on a

$$M=\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3},\ N=\frac{-y-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\frac{1}{2y},$$

et on trouve

$$\frac{dM}{dy}=\frac{2y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{dN}{dx}=\frac{2y+2\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}-\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+y^2}};$$

ces valeurs étant égalées entr'elles et réduites donnent

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}=\frac{2y}{x^3}+\frac{x^2+2y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}},$$

et par conséquent l'équation proposée peut s'intégrer immédiatement. On obtient d'abord

$$\int M\,dx=l\,x-\frac{y^2}{2x^2}+y\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2};$$

(*) Je me suis arrêté sur cette intégration parce qu'elle sert de base à une démonstration très-élégante du principe de la composition des forces, donnée par Laplace dans sa *Mécanique céleste*.

mais $\int \frac{y\,dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2} = -\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}$

$$+\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{(-y+\sqrt{x^2+y^2})}{x};$$

donc $\int M\,dx = l\,x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}$

$$+\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{(-y+\sqrt{x^2+y^2})}{x} = v.$$

On trouve ensuite

$$N - \frac{dv}{dy} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{y^2}{2x^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2y},$$

et enfin $Y = \frac{1}{2}\,l\,y$, d'où il résulte

$$u = l\,x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{-y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right) = c.$$

La forme de cet exemple étoit trop compliquée pour qu'on pût y reconnoître, par la seule inspection, une différentielle complète; et dans tous les cas semblables il faudra commencer par s'assurer si l'équation proposée satisfait ou non à la condition d'intégrabilité.

263. Lorsque l'équation primitive n'est pas sous la forme $u = c$, ou que la différentielle $du = 0$ renferme des facteurs qui disparoissent, l'équation du premier ordre qui en résulte n'est plus immédiatement intégrable. Si on avoit, par exemple, $u = y - cx = 0$, on

trouveroit $du=dy-c\,dx=0$, et éliminant c, il viendroit $x\,dy-y\,dx=0$, équation qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, puisqu'elle donne

$$M=-y,\ N=x,\ \frac{dM}{dy}=-1,\ \frac{dN}{dx}=1.$$

Mais si on dégage la constante c, on aura $\frac{y}{x}=c$, et en différentiant, $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0$; sous cette forme

$$M=-\frac{y}{x^2},\quad N=\frac{1}{x},\quad \frac{dM}{dy}=-\frac{1}{x^2}=\frac{dN}{dx}.$$

On voit donc que l'intégrabilité de l'équation $x\,dy-y\,dx$ tient à la restitution du facteur $\frac{1}{x^2}$, qui a disparu après la différentiation et l'élimination de la constante arbitraire.

En général, toute équation différentielle, dans laquelle dx et dy ne passent pas le premier degré, ne peut résulter que de l'élimination de la constante c, dans une équation de la forme $P+cQ=0$, P et Q désignant des fonctions quelconques de x et de y. On trouve par cette élimination $Q\,dP-P\,dQ=0$, tandis qu'en différentiant l'équation $\frac{P}{Q}=c$, on auroit obtenu $\frac{Q\,dP-P\,dQ}{Q^2}=0$: la première manière d'opérer fait donc disparoître le facteur $\frac{1}{Q^2}$; et avec lui s'en vont aussi tous les facteurs qui peuvent être communs aux deux quantités $Q\,dP$ et $P\,dQ$.

Il suit de ce qui précède, que lorsque l'équation

$$M\,dx+N\,dy=0$$

ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, c'est que la différentiation et l'élimination de la constante arbitraire contenue dans l'équation primitive, ont fait disparoître un facteur qui, s'il étoit connu et restitué, rendroit le premier membre de l'équation proposée une différentielle complète à deux variables. Soit z ce facteur; on aura donc $zM\mathrm{d}x+zN\mathrm{d}y=\mathrm{d}u$, u étant une fonction primitive de x et de y; et par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}.zM}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}.zN}{\mathrm{d}x}.$$

En développant cette dernière équation, on trouvera

$$M\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}=N\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x},$$

ou
$$M\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-N\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)z=0. \quad (A).$$

Si l'on pouvoit, en général tirer de cette équation une valeur de z, l'intégration des équations différentielles quelconques du premier ordre pourroit s'effectuer par le procédé du n°. 261. Mais l'équation (A) est presque toujours plus difficile à traiter que la proposée, puisque la fonction z qu'elle renferme dépend de deux variables et a deux coefficiens différentiels, et qu'elle est par conséquent de l'espèce de celles dont on a indiqué la formation n°. 131. Nous ne saurions donc pour le moment entreprendre sa résolution, qui, comme on le verra dans la suite, nous rameneroit au point d'où nous sommes partis, mais nous allons faire connoître quelques-unes des propriétés du facteur z.

264. Il est toujours facile de trouver le facteur z, lorsque l'on connoît l'équation primitive correspondante à l'équation différentielle proposée. Pour cela il faut mettre cette équation primitive sous la forme $u=c$, c étant la constante arbitraire. En différentiant on trouve

$$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=0,$$

et comparant avec $zM\mathrm{d}x+zN\mathrm{d}y=\mathrm{d}u$, il vient

$$z=\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y}{M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y};$$

le quotient est indépendant des différentielles $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$; on l'obtient encore en égalant entr'elles les valeurs de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, tirées des équations

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=0, \quad M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0,$$

ce qui donne $\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}}=\frac{M}{N}$, et fait voir par conséquent que si M et N n'ont aucun facteur commun, z sera le plus grand diviseur commun des coefficiens différentiels

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \text{ et } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}.$$

Connoissant une valeur de z, on en déduit une infinité d'autres, en observant que si on multiplie les deux membres de l'équation $zM\mathrm{d}x+zN\mathrm{d}y=\mathrm{d}u$, par une fonction quelconque de u, que nous désignerons par $\varphi(u)$, les deux membres du résultat

$$z\varphi(u)M\mathrm{d}x+z\varphi(u)N\mathrm{d}y=\varphi(u)\mathrm{d}u,$$

seront aussi des différentielles complètes ; ainsi z étant un facteur propre à rendre intégrable l'équation $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y$, le produit $z\varphi(u)$ jouira de la même propriété.

265. Il y a des cas où le facteur z ne doit renfermer que l'une des variables x ou y, et alors il est facile d'en obtenir l'expression au moyen de l'équation (A). Supposons en effet dans cette équation $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=0$, elle deviendra

$$-N\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

et on en tirera

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x,$$

équation qui aura lieu si la quantité

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)$$

se réduit à une fonction de x. En représentant cette fonction par X, et en intégrant on trouvera

$$\mathrm{l}z=\int X\mathrm{d}x, \text{ ou } z=e^{\int X\mathrm{d}x}.$$

Appliquons cette formule à l'équation

$$\mathrm{d}y+Py\mathrm{d}x=Q\mathrm{d}x,$$

nous aurons

$$M=Py-Q, \quad N=1, \quad \frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)=P,$$

et par conséquent $z=e^{\int P\mathrm{d}x}$: multipliant donc l'équation $\mathrm{d}y+Py\,\mathrm{d}x-Q\,\mathrm{d}x=0$ par $e^{\int P\mathrm{d}x}$, nous trouverons $e^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+(Py-Q)\,e^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0$; intégrant le terme $e^{\int P\mathrm{d}x}$, par rapport à y, nous obtien-

drons $u = ye^{\int P dx} + X$, X étant une fonction de x, déterminée par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}.ye^{\int P dx}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = (Py - Q)e^{\int P dx},$$

de laquelle on tire

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = -e^{\int P dx} Q, \qquad X = -\int e^{\int P dx} Q \mathrm{d}x,$$

et par conséquent

$$ye^{\int P dx} - \int e^{\int P dx} Q \mathrm{d}x = C,$$

ou comme dans le n°. 257,

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int e^{\int P dx} Q \mathrm{d}x + C\right).$$

Nous ne nous arrêterons point au cas où le facteur z ne devroit renfermer que la variable y; on voit aisément que son expression seroit alors $z = e^{\int Y dy}$, en faisant

$$Y = \frac{1}{M}\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\right),$$

et que ce cas n'auroit lieu qu'autant que Y seroit absolument indépendant de x.

266. Il existe entre une fonction homogène et ses coefficiens différentiels des relations particulières qui facilitent beaucoup l'intégration.

Si V désigne une fonction homogène de x, y, etc. et qu'on y substitue tx, ty, etc. au lieu de x, y, etc. elle prendra nécessairement la forme $t^m V$, m étant la somme des exposans des variables dans chaque terme (255). Supposant ensuite que t devienne $t+g$, on aura $(t+g)^m V$ au lieu de V, ou $(1+g)^m V$, en faisant $t = 1$. Dans la même hypothèse x, y, etc. se changeront respectivement en

$$x + gx, y + gy, \text{ etc.},$$

et mettant gx pour h, gy pour k, dans la formule

du n°. 121, on parviendra à cette équation

$$\left.\begin{array}{l} V+\frac{dV}{dy}gx+\frac{dV}{dy}gy \quad +\text{etc.} \\ +\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}g^2x^2+2\frac{d^2V}{dxdy}g^2xy+\frac{d^2V}{dy^2}g^2y^2+\text{etc.}\right\} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} =(1+g)^mV.$$

En développant le second membre, et comparant ensemble les termes affectés de la même puissance de l'indéterminée g, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dV}{dx}x+\frac{dV}{dy}y+\text{etc.}=mV \\ \frac{d^2V}{dx^2}x^2+2\frac{d^2V}{dxdy}xy+\frac{d^2V}{dy^2}y^2=m(m-1)V \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

267. Au moyen de ces relations, le facteur z se présente pour ainsi dire de lui-même dans les équations différentielles homogènes. Si $Mdx+Ndy=0$ est une équation de ce genre, et que la somme des exposans x et de y dans M et dans N soit égale à m, en supposant que z soit aussi une fonction homogène du degré n, et faisant $zMdx+zNdy=du$, il résulte du théorême démontré n°. précéd., que

$$zMx+zNy=(m+n+1)u,$$

puisque le degré de la fonction u sera nécessairement plus élevé de l'unité que celui des fonctions zM et zN. Divisant donc la première équation par la seconde, il viendra

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{1}{m+n+1}\cdot\frac{du}{u},$$

et comme le second membre de ce résultat est une différentielle complète, il faudra que le premier membre

en soit pareillement une, d'où il suit que $\frac{1}{Mx+Ny}$ sera un des facteurs propres à rendre intégrable l'équation $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$.

Des équations du premier ordre, dans lesquelles les différentielles passent le premier degré.

268. Par la génération des équations différentielles, dont nous avons donné plusieurs exemples n°. 43, on voit qu'il peut s'en présenter dans lesquelles les différentielles passent le premier degré. Prenons

$$\mathrm{d}y^n+P\mathrm{d}y^{n-1}\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y^{n-2}\mathrm{d}x^2\ldots+T\mathrm{d}y\mathrm{d}x^{n-1}+U\mathrm{d}x^n=0$$

pour la formule générale de ces équations : en la divisant par la plus haute puissance de $\mathrm{d}x$, elle deviendra

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^n+P\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{n-1}+Q\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{n-2}\ldots+T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+U=0;$$

en la résolvant par rapport au coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, et désignant par p, p', p'', etc. ses racines, nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-p=0,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-p'=0,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-p''=0,\text{ etc.}$$

résultats qui pourront tous se traiter par les méthodes précédentes, puisque les différentielles ne s'y trouvent qu'au premier degré. L'intégrale de chacun d'eux sera aussi l'intégrale de l'équation proposée, qui sera encore satisfaite par les valeurs tirées de l'équation formée du produit de toutes ces intégrales. Les deux exemples suivans, quoique très-simples, éclairciront

toutes les difficultés que pourroit renfermer l'énoncé ci-dessus.

Soit 1°. $dy^2 - a^2dx^2 = 0$; cette équation se décompose en $dy + adx = 0$, et $dy - adx = 0$, dont les intégrales sont $y + ax = c$, $y - ax = c'$. Il est facile de voir que chacun de ces résultats satisfait à la proposée; l'équation $(y+ax-c)(y-ax-c') = 0$ y satisfait aussi, car elle donne

$$(y+ax-c)(dy-adx)+(y-ax-c')(dy+adx) = 0.$$

d'où $$dy = \frac{[(y+a-c)-(y-ax-c')]adx}{2y-(c+c')};$$

mettant successivement, au lieu de y, ses valeurs $c-ax$, $c'+ax$, on trouve

$$dy = -adx, \qquad dy = +adx.$$

2°. Considérons l'équation $dy^2 - axdx^2 = 0$; nous en tirerons $dy + dx\sqrt{ax} = 0$, $dy - dx\sqrt{ax} = 0$, et en intégrant, nous aurons

$$y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c = 0, \quad y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c' = 0.$$

Chacune de ces équations, ainsi que leur produit, pourront être considérés comme des solutions de la proposée; mais ce cas-ci diffère du précédent, en ce que les radicaux que contiennent les deux intégrales obtenues, forment entr'elles un lien qui permet de les comprendre toutes deux dans une même équation, et avec une seule constante. En effet, si on fait disparoître le radical, dans l'équation

$$y + \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} - c = 0,$$

on obtient $(y-c)^2 = \frac{4}{9}ax^3$. Ce résultat est encore l'intégrale de l'équation proposée, à laquelle il conduira immédiatement par l'élimination de c.

269. Quoique ce qui précède ne fasse dépendre l'intégration des équations où les différentielles passent le premier degré, que de la résolution des équations algébriques, voici néanmoins quelques cas dans lesquels cette intégration s'opère plus facilement avec le secours d'artifices analytiques appropriés aux circonstances et qui éludent, au moins en partie, les difficultés que présente la résolution de l'équation différentielle proposée, par rapport à $\frac{dy}{dx}$.

Quand cette équation ne contient que l'une des deux variables, x, par exemple, on en tire immédiatement $\frac{dy}{dx}=X$, d'où $y=\int X\,dx$; mais s'il est plus facile de la résoudre par rapport à x que par rapport au coefficient $\frac{dy}{dx}$, que nous représenterons pour abréger par p, et qu'on ait $x=P$, P désignant une fonction quelconque de p, on observera que l'équation $\frac{dy}{dx}=p$, ou $dy=p\,dx$, donne $y=px-\int x\,dp$; mettant pour x sa valeur P, il viendra $y=Pp-\int P\,dp$. L'intégrale demandée sera donc le résultat de l'élimination de p, entre les deux équations

$$x=P,\quad y=Pp-\int P\,dp.$$

Soit, par exemple, $x\,dx+a\,dy=b\sqrt{dx^2+dy^2}$, ou $x+ap=b\sqrt{1+p^2}$, en écrivant p au lieu de $\frac{dy}{dx}$. Cette dernière équation donne immédiatement

$$x=-ap+b\sqrt{1+p^2},\quad P=-ap+b\sqrt{1+p^2},$$

et par conséquent

$$y=bp\sqrt{1+p^2}-\tfrac{1}{2}ap^2-b\int dp\sqrt{1+p^2}.$$

270.

270. Considérons encore le cas où les deux variables entrent en même temps dans l'équation proposée; mais supposons que l'une d'elles, y, par exemple, n'y monte qu'au premier degré : nous aurons alors y égal à une fonction de x et de p, en sorte que

$$dy = R\,dx + S\,dp,$$

et par conséquent

$$p\,dx = R\,dx + S\,dp \text{ ou } (R-p)\,dx + S\,dp = 0.$$

Si l'on parvenoit à intégrer cette dernière, on auroit entre p, x et une constante arbitraire, une relation au moyen de laquelle chassant p de l'équation proposée on obtiendroit une équation primitive, qui, renfermant une constante arbitraire, seroit l'intégrale cherchée.

Voici une formule très-étendue et très-remarquable, comprise dans le cas général, et dont l'intégration s'exécute facilement.

Si l'équation proposée peut être mise sous la forme $y = px + P$, et que P ne renferme que le coefficient p, on aura $dy = p\,dx + \left(x + \frac{dP}{dp}\right)dp$; et puisque $dy = p\,dx$, il restera l'équation $\left(x + \frac{dP}{dp}\right)dp = 0$, qui se décomposera en deux facteurs $x + \frac{dP}{dp} = 0$, $dp = 0$. Eliminant p entre le premier et l'équation proposée, on aura une équation primitive qui satisfera à la proposée, mais qui, ne contenant point de constante arbitraire, ne sera que particulière. Le second facteur s'intégre et donne $p = c$, ou $dy = c\,dx$ et $y = cx + c'$. Les constantes c et c' ne sont pas arbitraires toutes deux; car en faisant dans l'équation proposée $p = c$, on a $y = cx + C$, C étant ce que devient P dans la même

circonstance, et on tire de là $c'=C$. L'intégrale de la proposée est donc $y=cx+C$, et s'obtient en changeant p en c.

Soit pour exemple l'équation

$$y\,dx-x\,dy=n\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Nous la mettrons d'abord sous la forme

$$y=px+n\sqrt{1+p^2};$$

en la différentiant nous trouverons

$$dy=p\,dx+x\,dp+\frac{np\,dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

et à cause que $dy=p\,dx$, il restera

$$x\,dp+\frac{np\,dp}{\sqrt{1+p^2}}=0.$$

Cette équation se décompose en deux facteurs

$$x+\frac{np}{\sqrt{1+p^2}}=0, \text{ et } dp=0;$$

le second nous conduit à $p=c$, et l'intégrale demandée est

$$y=cx+n\sqrt{1+c^2}.$$

Le premier facteur donne $p=\frac{x}{\sqrt{n^2-x^2}}$, et substituant dans l'équation proposée, on a $y^2+x^2=n^2$, équation qui ne renferme point de constante arbitraire, qui n'est point comprise dans l'intégrale

$$y=cx+n\sqrt{1+c^2},$$

et telle néanmoins que les valeurs de y et de dy, qui s'en déduisent, satisfont à l'équation différentielle proposée, dont elle offre par conséquent une *solution particulière*.

Des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

271. Examinons maintenant la nature et l'origine des *solutions particulières*. La relation qui existe entre une équation différentielle et son intégrale est telle que cette dernière équivaut à un nombre infini d'équations primitives, qu'on obtiendroit en donnant successivement à la constante arbitraire toutes les valeurs possibles, et dont chacune satisferoit à l'équation différentielle (43). Nous désignerons ces diverses équations primitives sous le nom d'*intégrales particulières*, puisque ce sont des cas particuliers de l'intégrale complète. Les *solutions particulières*, dont le nombre est toujours limité, sont des équations primitives essentiellement différentes des intégrales particulières. Ces solutions sont de deux sortes, les unes ne sont autre chose que des facteurs de l'équation différentielle proposée, dans lesquels dx et dy n'entrent point, et qui par conséquent étant égalés à zéro donnent des équations primitives, et établissent entre x et y des relations qui rendent la proposée identique. En cherchant les diviseurs communs des fonctions M et N, on trouvera les solutions de cette espèce, dont est susceptible l'équation

$$M\,dx+N\,dy=0.$$

La seconde espèce de solutions particulières dont l'equation $y\,dx-x\,dy=n\sqrt{dx^2+dy^2}$ nous a fourni un exemple, est liée intimément à l'équation différentielle dont elle dérive, quoiqu'elle ne puisse rentrer dans aucun des cas de l'intégrale complète, quelque valeur que l'on donne à la constante arbitraire, ainsi

qu'il est facile de le voir, en comparant les équations $y=nx+n\sqrt{1+c^2}$ et $x^2+y^2=n^2$ (270).

Voici la théorie que Lagrange, en 1774, donna de ces dernières solutions, regardées avant lui comme formant un paradoxe dans le Calcul intégral (*).

272. Les solutions particulières, sans être comprises explicitement dans l'intégrale complète, peuvent néanmoins s'en déduire, en cessant de regarder la constante arbitraire comme invariable. En effet, soit $U=0$, une équation primitive renfermant les variables x, y et une constante c; l'équation différentielle correspondante, que je désignerai par $V=0$, sera le résultat de l'élimination de cette constante, entre les équations $U=0$, $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0$ (43); mais si on suppose que c soit une fonction quelconque de x, on donnera à l'équation $U=0$ une extension telle qu'elle pourra représenter une équation quelconque à deux variables, et par conséquent aussi toutes les solutions particulières de l'équation $V=0$. Cela posé, mettons l'équation $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0$, sous la forme $dy=pdx$, et observons que puisque l'équation $V=0$

(*) Il les appela *intégrales particulières*, et donna le nom de solutions particulières aux différens cas de l'intégrale complète Laplace, qui s'est occupé avec succès du même sujet avant Lagrange, emploie ces dénominations dans un sens inverse, et j'ai suivi. Il m'a semblé que les équations primitives, qui résolvent les équations différentielles sans être comprises dans leur intégrale complète, ne s'obtenant point par les procédés de l'intégration, ne devoient pas porter un nom qui rappelle ces procédés.

résulte de l'élimination de c entre $U=0$ et $dy=pdx$, elle demeurera la même quelque valeur qu'on donne à c, et qu'on pourroit par conséquent supposer c variable, pourvu que la loi de sa variation fût telle qu'on eût toujours $dy=pdx$. Or, quoiqu'en regardant c comme variable aussi bien que x, il vienne en général $dy=pdx+qdc$, p et q étant des fonctions de x et de c, on aura néanmoins $dy=pdx$ seulement, si $q=0$. Déterminant donc c par cette dernière équation, et substituant dans $U=0$ la valeur qu'on trouvera, le résultat satisfera encore à l'équation différentielle $V=0$.

Dans ce qui précède nous avons regardé y comme une fonction de x et de c; en considérant à son tour x comme une fonction de y et de c, on mettra l'équation $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0$, sous la forme $dx=mdy$, et raisonnant comme ci-dessus, on trouvera que si la valeur de dx, prise en faisant varier c, est $dx=mdy+ndc$, l'équation résultante de l'élimination de c, entre $n=0$ et $U=0$, satisfera aussi à l'équation différentielle $V=0$.

Les équations primitives que donnent l'un et l'autre des procédés que nous venons d'exposer, sont nécessairement, ou des solutions particulières de l'équation $V=0$, si elle est susceptible d'en avoir, ou des cas particuliers de son intégrale complète.

On peut comprendre ces deux procédés dans un seul, en faisant évanouir les dénominateurs dans l'équation $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dc}dc=0$, différentielle de $U=0$, prise par rapport à x, à y et à c. Elle aura alors la forme

$$Mdx+Ndy+Pdc=0;$$

on en tirera

$$dy=-\frac{M}{N}dx-\frac{P}{N}dc \qquad dx=-\frac{N}{M}dy-\frac{P}{M}dc,$$

et si les fonctions entières M, N sont algébriques, ou quoique transcendantes, ne peuvent pas devenir infinies par quelque valeur de c, le coefficient de dc ne disparoîtra que par la supposition de $P=0$, qui donnera ainsi toutes les solutions particulières de $V=0$.

Lorsque l'équation $P=0$ ne renferme que c et des constantes, elle donne c constant et ne conduit par conséquent qu'à une intégrale particulière. Quand c ne se trouve qu'au premier degré dans U, il n'entre point dans P, qui ne contient alors que les variables x et y; mais dans ce cas, l'équation $P=0$ satisfait elle-même à $V=0$, car $U=0$ étant de la forme $Q+cP=0$, $V=0$ devient $P\,dQ-Q\,dP=0$. Pour s'assurer alors si $P=0$ est une solution particulière, ou seulement une intégrale particulière, on éliminera une des variables x ou y, entre $U=0$ et $P=0$; la résultante donnera c variable dans le premier cas, et c constant dans le second. Si on trouvoit $c=\frac{0}{0}$, il en faudroit conclure que l'équation $P=0$ est un facteur de $U=0$, indépendant de la constante c et par conséquent étranger à l'équation différentielle $V=0$.

275. Appliquons maintenant cette théorie à l'équation $y\,dx-x\,dy=n\sqrt{dx^2+dy^2}$, ayant pour intégrale complète $y-cx=n\sqrt{1+c^2}$ (270); nous aurons, en faisant varier c en même temps que x et y, et réduisant tous les termes au même dénominateur,

$$c\,dx\sqrt{1+c^2}-dy\sqrt{1+c^2}+(x\sqrt{1+c^2}+nc)\,dc=0;$$

égalant à zéro le coefficient de dc, il vient

$$x\sqrt{1+c^2}+nc=0,$$

d'où on tire $c=\frac{x}{\sqrt{n^2-x^2}}$. Cette valeur change l'équation $y-cx=n\sqrt{1+c^2}$ en $x^2+y^2=n^2$ et donne la solution particulière obtenue dans le n°. cité.

Toutes les équations de la forme $y=px+P$ (270), dans laquelle se trouve comprise la précédente, ont aussi une solution particulière analogue à celle que nous venons d'obtenir. Leur intégrale complète représentée par $y=cx+C$, C étant composé en c, comme P l'est en p, donne

$$c\,dx-dy+\left(x+\frac{dC}{dc}\right)dc=0,$$

et posant $x+\frac{dC}{dc}=0$, on en tire la valeur de c, d'où dépend la solution particulière. Cette solution particulière s'est offerte à nous lorsque nous avons intégré l'équation $y=px+P$; car en la différentiant nous sommes parvenus à une équation composée des deux facteurs

$$x+\frac{dP}{dp}=0, \text{ et } dp=0,$$

et le résultat de l'élimination de p entre

$$y=px+P \text{ et } x+\frac{dP}{dp}=0,$$

seroit le même que celui de l'élimination de c, entre

$$y=cx+C, \text{ et } x+\frac{dC}{dc}=0.$$

Les équations $y=px+P$ ont été remarquées d'abord par Clairaut, tant à cause de la propriété qu'elles ont de s'intégrer facilement, après une nouvelle différentia-

tion, que par rapport à la solution particulière que cette différentiation manifeste sur le champ.

Soit encore l'équation

$$x\,dx+y\,dy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

dont l'intégrale est

$\sqrt{x^2+y^2-a^2}=y+c$, ou $x^2-2cy-c^2-a^2=0$, en faisant disparoître le radical. On trouve

$$x\,dx-c\,dy-(y+c)\,dc=0,$$

d'où il résulte $y+c=0$,

et par conséquent $\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0$;

la solution particulière est donc dans cet exemple

$$x^2+y^2-a^2=0.$$

274. Il sera toujours facile de trouver, par ce qui précède, les solutions particulières des équations différentielles dont on connoîtra l'intégrale complète; mais il existe aussi des méthodes très-simples pour déduire ces solutions de l'équation différentielle elle-même, et nous allons en faire connoître une.

Lorsque dans l'équation primitive $U=0$, on regarde c comme variable, ce qui donne $dy=p\,dx+q\,dc$, et qu'on a en même temps $q=0$, cette équation satisfait à l'équation différentielle $V=0$, mais ne satisfait pas, du moins en général, à la différentielle de celle-ci, que je désignerai par $V'=0$, et dans laquelle je supposerai que dx soit constant. En effet, cette dernière ne renferme que les différentielles de y, prises par rapport à x, qui sont $dy=p\,dx$, $d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2$; mais en faisant varier c, on auroit

$$dy=pdx+qdc\quad d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2+\frac{dp}{dc}dxdc+dqdc+qd^2c,$$

et dans l'hypothèse de $q=0$, qui répond aux solutions particulières et qui donne $dq=0$, il viendroit

$$dy=p\,dx,\quad d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2+\frac{dp}{dc}dx\,dc:$$

l'expression de d^2y ne se réduiroit à $\frac{dp}{dx}dx^2$, que dans le cas particulier où on auroit en outre $\frac{dp}{dc}=0$. Si cela arrivoit, l'équation $U=0$ satisferoit en même temps à $V=0$ et à $V'=0$, mais non pas à $V''=0$, différentielle de $V'=0$; car celle-ci suppose que

$$dy=p\,dx,\quad d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2,\quad d^3y=\frac{d^2p}{dx^2}dx^3,$$

tandis qu'en faisant varier c, en ayant égard aux conditions $q=0$, $\frac{dp}{dc}=0$, trouvées ci-dessus, on auroit

$$dy=pdx,\ d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2,\ d^3y=\frac{d^2p}{dx^2}dx^3+\frac{d^2p}{dxdc}dx^2dc:$$

il faudroit donc qu'on eût encore dans ce cas $\frac{d^2p}{dx\,dc}=0$. Cette condition, réunie aux précédentes, ne suffiroit pas pour que l'équation $U=0$ satisfît, dans l'hypothèse de c variable, à la différentielle de $V''=0$, que je représenterai par $V'''=0$, et qui suppose que

$$dy=pdx,\ d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2,\ d^3y=\frac{d^2p}{dx^2}dx^3,\ d^4y=\frac{d^3p}{dx^3}dx^4,$$

puisqu'en ayant égard à la variabilité de c et aux conditions ci-dessus, on trouveroit

$$dy=pdx,\ d^2y=\frac{dp}{dx^2}dx^2,\ d^3y=\frac{d^2p}{dx^2}dx^3,$$
$$d^4y=\frac{d^3p}{dx^3}dx^4+\frac{d^3p}{dx^2dc}dx^3dc;$$

et on auroit une nouvelle condition, $\frac{d^3p}{dx^2dc}=0$.

On obtiendroit de la même manière les conditions qui doivent avoir lieu, pour que les solutions particulières satisfassent aux différentielles des ordres supérieurs de l'équation $V=0$. Il est facile de voir que les quantités

$$q,\quad \frac{dp}{dc},\quad \frac{d^2p}{dxdc},\quad \frac{d^3p}{dx^2dc},\text{ etc.}$$

ne sont autre chose que

$$\frac{dy}{dc},\quad \frac{d^2y}{dxdc},\quad \frac{d^3y}{dx^2dc},\quad \frac{d^4y}{dx^3dc},\text{ etc.}$$

et qu'une solution particulière ne pourra satisfaire qu'aux équations différentielles dont l'ordre est inférieur ou égal à celui de la dernière des conditions

$$\frac{dy}{dc}=0,\quad \frac{d^2y}{dxdc}=0,\quad \frac{d^3y}{dx^2dc}=0,\quad \frac{d^4y}{dx^3dc}=0,\text{ etc.}$$

qu'elle remplit.

Ceci fait connoître le caractère qui distingue une solution particulière d'une intégrale particulière. L'une ne satisfait jamais qu'à un nombre limité des différentielles de l'équation $V=0$, parce qu'elle ne remplit qu'un pareil nombre des conditions rapportées ci-dessus; l'autre, au contraire, les remplissant toutes, puisqu'elle suppose c constant, satisfait en même temps à l'équation $V=0$, et à toutes celles qui en dérivent.

L'inverse de cette dernière proposition est vraie; c'est-à-dire, que l'on ne peut avoir en même temps

$$\frac{dy}{dc}=0,\quad \frac{d^2y}{dxdc}=0,\quad \frac{d^3y}{dx^2dc}=0,\text{ etc.}$$

indéfiniment, sans que la fonction $\frac{dy}{dc}$ ne soit constante;

car le changement qu'elle éprouve lorsque x devient $x+h$, ayant pour développement

$$\frac{dy}{dc}+\frac{d^2y}{dx\,dc}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2\,dc}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

est toujours nul dans l'hypothèse établie : $\frac{dy}{dc}$ ne variant donc dans aucune circonstance, par rapport à x, sera nécessairement indépendant de cette quantité.

275. Voyons maintenant de quelle manière ces considérations conduisent à la connoissance des solutions particulières. Supposons que l'on ait fait disparoître les dénominateurs et les radicaux dans l'équation différentielle $V=0$, et qu'elle ne contienne point de fonctions transcendantes. Puisque la fonction V est indépendante de c, ou que l'équation $V=0$ devient identique par la substitution des valeurs de y et de dy, quel que soit c, on aura nécessairement $\frac{dV}{dc}=0$; mais V ne contenant pas explicitement c, dV ne peut être que de la forme

$$M\,d.\frac{dy}{dx}+N\,dy+P\,dx,$$

et la variation par rapport à c, ne peut venir que de celle qu'éprouve y relativement à cette dernière quantité : on aura donc

$$\frac{dV}{dc}=M\frac{d^2y}{dx\,dc}+N\frac{dy}{dc}=0,$$

équation qui doit être identique par elle-même, ainsi que toutes celles qui en dérivent. Elle se réduit à $M\frac{d^2y}{dx\,dc}=0$, lorsque $\frac{dy}{dc}$ s'évanouit seul, et donne dans ce cas $M=0$.

Si $\frac{dy}{dc}$ et $\frac{d^2y}{dx\,dc}$ s'évanouissent en même-temps, elle sera satisfaite ; mais en la différentiant par rapport à x et à y, on trouvera

$$M\frac{d^3y}{dx^2dc}+\left(\frac{dM}{dx}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dx}+N\right)\frac{d^2y}{dxdc}+\left(\frac{dN}{dx}+\frac{dN}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dc}=0,$$

résultat que les équations $\frac{dy}{dc}=0$, $\frac{d^2y}{dx\,dc}=0$, réduiront à $M\frac{d^3y}{dx^2dc}=0$ et dont on tirera $M=0$, si $\frac{d^3y}{dx^2dc}$ ne s'évanouit pas.

Si $\frac{d^3y}{dx^2dc}$ s'évanouissoit, on différentieroit de nouveau, et le résultat, qui seroit de la forme

$$M\frac{d^4y}{dx^3dc}+R\frac{d^3y}{dx^2dc}+S\frac{d^2y}{dx\,dc}+T\frac{dy}{dc}=0,$$

donneroit encore $M=0$, si $\frac{d^4y}{dx^3dc}$ ne s'évanouissoit pas.

On voit, sans qu'il soit besoin d'aller au-delà du résultat précédent, que la fonction M, multipliant toujours le coefficient différentiel de l'ordre le plus élevé, doit être nulle lorsque ce coefficient ne s'évanouit pas, et que par conséquent lorsque les équations

$$\frac{dy}{dc}=0,\quad \frac{d^2y}{dx\,dc}=0,\quad \frac{d^3y}{dx^2dc}=0,\text{ etc.}$$

n'ont pas lieu à l'infini, ce qui est le cas des solutions particulières, il faut qu'on ait $M=0$: ces solutions ne peuvent donc être que des facteurs de M. Mais quand $M=0$, l'équation $Md.\frac{dy}{dx}+N\,dy+P\,dx=0$,

qui a lieu en même temps que $V=0$, se réduit à

$$N\,dy+P\,dx=0,$$

et donne $\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{N}$; substituant cette valeur dans $V=0$, il en résultera une équation primitive qui doit s'accorder avec $M=0$. C'est ainsi que l'on pourra distinguer, parmi les facteurs de M, ceux qui sont des solutions particulières de l'équation différentielle proposée, et s'il y en a qui le soient en effet; car toutes les équations différentielles n'ont pas de ces solutions.

Si on tire de l'équation $M\,d.\frac{dy}{dx}+N\,dy+P\,dx=0$, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on aura $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{N\,dy+P\,dx}{M}$, et cette expression deviendra $\frac{0}{0}$ dans le cas des solutions particulières, qui donnent en même temps $M=0$, et $N\,dy+P\,dx=0$.

Il est évident qu'en supposant x fonction de y et de c, et prenant dy constant, on auroit, par rapport à x, des résultats analogues à ceux que nous venons d'obtenir par rapport à y, et que les solutions particulières donneroient encore $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{0}{0}$. Il est nécessaire d'essayer l'une et l'autre hypothèse, c'est-à-dire, de poser successivement $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{0}{0}$, $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{0}{0}$, parce que la première seule peut faire connoître les solutions de la forme $y=const.$ et la seconde celles de la forme $x=const.$

276. Cherchons par ces méthodes les solutions particulières de l'équation $y=px+P$, dont nous nous sommes déjà occupés n°. 273. Nous en tirerons $-\left(x+\frac{dP}{dp}\right)dp=0$, puisque $dy=p\,dx$; et par

conséquent $\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{0}{-\left(x+\frac{dP}{dp}\right)dx}$. Pour que $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{0}{0}$, il faudra que $x+\frac{dP}{dp}=0$; éliminant p entre cette équation et la proposée, on aura la solution particulière demandée, ainsi que nous l'avons trouvée précédemment de plusieurs manières.

L'équation $x\,dx+y\,dy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ du même n°. 273, devient, après l'évanouissement du radical,

$$x^2\,dx^2+2xy\,dx\,dy+(a^2-x^2)\,dy^2=0;$$

et la différentiation donne

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x\,dx+y\,dy}{xy\,dx+(a^2-x^2)\,dy}.$$

En égalant à zéro le numérateur et le dénominateur de cette expression, on aura

$$x\,dx+y\,dy=0,\quad xy\,dx+(a^2-x^2)\,dy=0;$$

et chassant $\frac{dy}{dx}$, il viendra $x^2+y^2-a^2=0$, équation qui s'accorde avec la proposée, ainsi qu'avec chacune des précédentes, et que nous avons déjà déduite de l'intégrale complète.

Pour n'être induit en erreur dans aucun cas, sur les solutions particulières, il est nécessaire de supprimer tous les facteurs communs qu'auroit l'équation

$$M\,dx+N\,dy=P\,dx+0\ (275).$$

277. Pour donner un exemple des solutions particulières de la forme $y=const.$ nous prendrons l'équation $\frac{dy}{dx}=A(y-a)^m$, A étant une constante quelconque,

et nous trouverons $\frac{d^2y}{dx^2} = mA(y-a)^{m-1}\frac{dy}{dx}$. Cette valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne peut devenir $\frac{0}{0}$, que quand l'exposant $m-1$ est négatif et qu'on a en même temps $y=a$, et $\frac{dy}{dx}=0$. Quoique la première de ces valeurs entraîne la seconde, elles ne peuvent néanmoins satisfaire à la proposée que lorsque l'exposant m est positif; il faut donc, d'après cela, que m soit >0, et <1, ou positif et fractionnaire. Dans ce cas, la solution particulière est $y=a$.

Si on avoit $\frac{dy}{dx} = \sqrt{Y}$, Y étant une fonction de y, on trouveroit $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2\sqrt{Y}}\frac{dY}{dy}\frac{dy}{dx}$; et si la fonction Y devenoit nulle par la supposition de $y=a$, sans qu'il en arrivât autant à $\frac{dY}{dy}$, c'est-à-dire, si $y-a$ n'étoit qu'un facteur simple de Y, l'équation $y=a$ seroit une solution particulière de l'équation proposée : dans le cas contraire, la valeur $y=a$ rend $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, et n'est qu'une intégrale particulière.

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du premier ordre.

278. Après avoir épuisé les moyens connus pour intégrer une équation différentielle, il faut chercher à la résoudre par approximation, c'est-à-dire, à en tirer la valeur de y en x, au moyen d'une série. Lorsque l'on connoît la forme que doit avoir cette série, on en éter-

mine les coefficiens, en la substituant ainsi que sa différentielle, au lieu de y et de dy, dans l'équation proposée.

Si on avoit, par exemple, l'équation

$$dy+y\,dx=m\,x^n\,dx,$$

on supposeroit

$$y=A\,x^\alpha+B\,x^{\alpha+1}+C\,x^{\alpha+2}+\text{etc.}$$

mettant cette valeur, ainsi que celle de dy, qui en résulte, dans $dy+y\,dx=m\,x^n\,dx$, on auroit

$$\left.\begin{array}{llllll}\alpha Ax^{\alpha-1}+(\alpha+1)Bx^\alpha+(\alpha+2)Cx^{\alpha+1}+(\alpha+3)Dx^{\alpha+2}+\text{etc.}\\ -mx^n+\quad Ax^\alpha+\quad Bx^{\alpha+1}+\quad Cx^{\alpha+2}+\text{etc.}\end{array}\right\}=0;$$

cette équation deviendroit identique en faisant $n=\alpha-1$,

ou $\alpha=n+1$, et $A=\frac{m}{\alpha}$, $B=\frac{-m}{\alpha(\alpha+1)}$, $C=\frac{m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}$,

$$D=\frac{-m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)},\ \text{etc.}$$

et on trouveroit

$$y=m\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\text{etc.}\right].$$

Cette valeur de y est incomplète, puisqu'elle ne renferme point de constante arbitraire; voici comment on pourroit en obtenir une qui eût toute la généralité que comporte une intégrale :

Soit $f(x,y,c)=0$ l'intégrale d'une équation différentielle quelconque; pour en déterminer la constante c, il faudroit connoître la valeur de y qui répond à une certaine valeur de x; savoir, par exemple, que $y=b$, quand $x=a$: au moyen de cette condition on auroit $f(a,b,c)=0$, d'où on tireroit la valeur de c en a et b.

Il

Il est évident qu'on remplira le même but en préparant l'expression de y, déduite de l'équation différentielle, de manière qu'en y faisant $x=a$, il en résulte $y=b$; or, c'est ce qui peut s'effectuer en posant $x=a+t$, $y=b+u$, et prenant pour représenter u, une série dont tous les termes s'évanouissent quand $t=0$.

L'équation $\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=mx^n\mathrm{d}x$ devient par cette transformation $\mathrm{d}u+(b+u)\,\mathrm{d}t=m(a+t)^n$, et faisant

$$u=At^\alpha+Bt^{\alpha+1}+Ct^{\alpha+2}+\text{etc.}$$

on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} \alpha At^{\alpha-1}+(\alpha+1)Bt^\alpha+(\alpha+2)Ct^{\alpha+1}+\text{etc.} \\ \quad +\quad At^\alpha+\quad Bt^{\alpha+1}+\text{etc.} \\ +b \\ -ma^n-m\frac{n}{1}a^{n-1}t-m\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}t^2-\text{etc.} \end{array}\right\}=0;$$

il faudra supposer dans cette équation $\alpha-1=0$, ou $\alpha=1$, et il viendra

$$A=ma^n-b,\ B=\frac{mna^{n-1}-ma^n+b}{2},$$

$$C=\frac{mn(n-1)a^{n-2}-mna^{n-1}+ma^n-b}{2.3},\ \text{etc.}$$

279. La série de Taylor s'applique immédiatement à la recherche qui nous occupe. En regardant b comme une fonction de a, cette quantité deviendra

$$b+\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}\frac{t}{1}+\frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}a^2}\frac{t^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3b}{\mathrm{d}a^3}\frac{t^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

lorsque b se changera en $a+t$; et on aura par conséquent

$$y=b+u=b+\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}\frac{t}{1}+\frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}a^2}\frac{t^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3b}{\mathrm{d}a^3}\frac{t^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Mais puisque a et b sont deux valeurs correspondantes

de x et de y, il doit y avoir entr'elles et le coefficient $\frac{db}{da}$, la même relation qu'entre x, y et $\frac{dy}{dx}$: on trouvera donc la valeur de $\frac{db}{da}$, en mettant a et b à la place de x et de y, dans l'équation proposée ; et les différentielles successives de ce résultat donneront les valeurs de $\frac{d^2b}{da^2}$, $\frac{d^3b}{da^3}$, etc. par un calcul absolument semblable à celui du n°. 42.

Si on fait $a+t=a_1$, et que l'on écrive Y pour b, Y' pour $\frac{db}{da}$, Y'' pour $\frac{d^2b}{da^2}$, etc. enfin Y_1 pour $b+u$, on aura

$$Y_1=Y+Y'\frac{(a_1-a)}{1}+Y''\frac{(a_1-a)^2}{1.2}+\frac{(a_1-a)^3}{1.2.3}Y'''+\text{etc.}$$

formule analogue à celle que nous avons trouvée dans le n°. 209, et qui n'en diffère qu'en ce que les coefficiens Y', Y'', Y''', etc. contiennent dans le cas actuel, outre la quantité a, la première valeur Y, et cela, parce l'expression de $\frac{dy}{dx}$ renferme en même temps les deux variables x et y.

Tout ce qui a été dit dans le n°. cité s'applique nécessairement ici : si donc on prend une suite de quantités a, a_1, a_2, a_3, ... a_n, telles que chacune diffère très-peu de celle qui la précède, que l'on néglige les quarrés et les puissances supérieures des différences a_1-a, a_2-a_1, etc. on formera les valeurs successives de Y_1, Y_2, Y_3, et on en déduira la valeur de Y_n. On pourroit aussi revenir de cette valeur à celle de Y, comme dans le n°. 211. Enfin, s'il étoit nécessaire de tenir compte d'un certain nombre de puissances des

différences $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, etc. on auroit recours aux formules du n°. 219, en observant que les coefficiens Y', Y'', etc. Y'_1, Y''_1, etc. se déduisent de l'expression de $\frac{dy}{dx}$ et de ses différentielles, en y mettant successivement a et Y, a_1 et Y_1, etc. au lieu de x et de y.

De la construction géométrique des équations différentielles du premier ordre.

280. Ce qui précède fait voir que les équations différentielles du premier ordre à deux variables sont toujours possibles, c'est-à-dire, qu'on peut toujours assigner des valeurs soit rigoureuses, soit approchées, de la fonction qu'elles déterminent : la même chose se prouve aussi par des considérations géométriques. En effet, le coefficient $\frac{dy}{dx}$, donné par l'équation différentielle proposée, est la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec la ligne des abscisses, la tangente de la courbe qui représente cette équation (64) : prenant donc le point M, *fig.* 52, correspondant à l'abscisse $AP = a$, et à l'ordonnée $PM = b$, on menera la ligne MT, faisant avec MQ, parallèle à AB, l'angle $M'MQ$ égal à celui dont la tangente est $\frac{db}{da}$, ou Y' ; cette droite touchera la courbe cherchée au point M. Passant ensuite à un point P', infiniment proche de P, tirant l'ordonnée $P'M'$, et formant au point M' un angle $M''M'Q'$, dont la tangente soit égale à Y'_1, valeur consécutive de Y', on aura une tangente $T'M'$, consécutive à TM. On voit, qu'en continuant ce procédé, on tracera un polygone qui différera d'autant moins de la courbe à laquelle appar- FIG. 52.

tient l'équation proposée, qu'on en multipliera les côtés. Il résulte aussi de cette construction qu'une équation differentielle du premier ordre représente une infinité de courbes, puisqu'on peut prendre le premier point *M* où on voudra.

281. L'intégration des équations différentielles du premier ordre s'appelle aussi *Méthode inverse des tangentes*, parce que toute équation différentielle de cet ordre, donnant l'expression de $\frac{dy}{dx}$ en x et en y, fait connoître la relation qui existe entre les coordonnées et la soutangente, ou la tangente, ou la normale, etc. dans la courbe qu'elle représente. En effet, si on tire de l'équation proposée $\frac{dy}{dx} = p$, la soutangente aura pour expression $\frac{y}{p}$, la tangente $\frac{y\sqrt{1+p^2}}{p}$, etc. (64). On découvrit le Calcul différentiel pour mener des tangentes aux courbes, c'est-à-dire, pour résoudre le *Problême direct des tangentes*. On s'occupa ensuite du Calcul intégral, pour parvenir aux équations primitives des courbes par les propriétés de leurs tangentes, mais les progrès et les nombreuses applications de ce Calcul ont fait abandonner la dénomination de *Méthode inverse des tangentes*, qui ne convenoit qu'à un seul de ses usages.

Dans les premiers temps on chercha à déterminer par les aires ou même par les arcs de quelques courbes connues, l'ordonnée de la courbe demandée; depuis on a laissé ces constructions de côté, parce que, quelqu'élegantes qu'elles fussent dans la théorie, elles étoient toujours moins commodes et sur-tout moins exactes dans

la pratique, que les formules approximatives qui ont pris leur place.

Une équation différentielle ne peut se construire en général que lorsqu'on en a séparé les variables, parce qu'alors l'expression de l'une d'elles ne dépend plus que de la quadrature d'une courbe dont l'équation primitive est connue.

282. Proposons-nous de construire la courbe dans laquelle la soutangente est égale à une fonction donnée de l'abscisse x ; l'équation différentielle de cette courbe sera $\frac{y\,dx}{dy} = X$, X désignant la fonction donnée. Les variables se séparent sur-le-champ, dans cette équation, qui n'a que deux termes ; et il vient $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{X}$. Multiplions les deux membres de cette équation par une quantité constante m, nous aurons $\frac{m\,dy}{y} = \frac{m\,dx}{X}$; et désignant par Ly le logarithme de y, pris dans le système dont le module est m, l'intégration nous donnera

$$Ly = \int \frac{m\,dx}{X} = \frac{1}{m}\int \frac{m^2\,dx}{X}.$$

En construisant d'abord la courbe DN, *fig.* 53, telle que l'ordonnée correspondante à l'abscisse AP, soit $PN = \frac{m^2}{X}$, l'aire $ADNP$ donnera la valeur de $\int \frac{m^2\,dx}{X}$. On réduira cette aire à un rectangle FQ, dont l'un des côtés soit m, l'autre côté AQ, exprimera $\frac{1}{m}\int \frac{m^2\,dx}{X}$; décrivant ensuite la logarithmique ER, dont les ordonnées FIG. 53.

soient perpendiculaires à l'axe AC, et élevant par le point Q la perpendiculaire RQ, on aura $L.RQ=AQ$ (101) ou $L.RQ=\frac{1}{m}\int\frac{m^2 dx}{X}$, RQ sera donc égale à l'ordonnée PM de la courbe cherchée (*).

Il faut bien remarquer que cette construction n'exige pas que l'on ait l'expression analytique de la fonction X; on pourroit prendre à sa place l'ordonnée d'une courbe quelconque rapportée à l'axe AB, et effectuer sur cette ordonnée et sur la ligne arbitraire m les opérations graphiques indiquées par les formules ci-dessus. On voit aussi que la ligne m n'a été introduite que pour rendre ces formules homogènes, et peut être supposée égale à l'unité.

283. Je vais encore rapporter la solution d'un problême célèbre dans les premiers temps où l'on s'est occupé du Calcul intégral, du *problême des trajectoires*. Il a pour objet de *déterminer la courbe qui coupe toutes celles d'une espèce donnée, sous un angle donné*. On entend ici par courbes d'une espèce donnée, les diverses courbes particulières qu'on peut obtenir en assignant successivement à l'une des constantes d'une équation primitive toutes les valeurs possibles. Si, par exemple, on fait varier le paramètre d'une parabole, il en résultera une suite de paraboles rapportées au même axe, ayant même sommet, et dont les extrêmes seront

(*) Nous ne nous sommes pas arrêtés à détailler les différens moyens de décrire la logarithmique, qui ne sont tous qu'approximatifs; parce qu'il est plus simple de la construire par points, au moyen des tables de logarithmes. On pourroit employer aussi les espaces asymptotiques de l'hyperbole (227).

d'une part l'axe, et de l'autre la ligne qui lui est perpendiculaire et qui passe par le sommet : la courbe qui coupera toutes celles-ci sous un angle donné en sera la trajectoire (*).

Soient $D, N,$, DN, $D'N'$, etc. *fig.* 54, les courbes coupées et MZ la courbe coupante, ou la trajectoire cherchée ; si par l'un quelconque M de ses points on lui mène une tangente Mt, et qu'on tire aussi celle de la courbe coupée qui passe par ce point, l'angle TMt, d'après l'énoncé de la question, doit être égal à l'angle donné. Désignons par x', y', les coordonnées des courbes coupées, par x, y, celles de la courbe coupante, et par a la tangente trigonométrique de l'angle constant TMt, qui est égal à la différence des angles MTP et MtP, dont les tangentes respectives ont pour expression $\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{dy}{dx}$ (64) ; nous aurons FIG. 54.

$$\text{tang } TMt = \text{tang}\,(MtP - MTP),$$

et par conséquent $$a = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}} \text{ (Trig. 26).}$$

Nous supposerons ici que l'on connoisse l'équation primitive des courbes coupées ; on en tirera par la différentiation $dy' = p\,dx'$, et l'équation ci-dessus deviendra

$$a\left(1 + p\frac{dy}{dx}\right) + p - \frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots (A).$$

(*) On donne aussi en Mécanique le nom de *trajectoire*, à la courbe décrite par un corps sollicité par des forces quelconques ; mais il ne sauroit être question de cette espèce de trajectoire dans un ouvrage consacré uniquement à l'Analyse et à la Géométrie.

Il faudra écrire par-tout x et y, au lieu de x' et de y', parce qu'au point M la courbe coupée et la courbe coupante ont les mêmes coordonnées. Cela fait, si on élimine entre l'équation (A) et l'équation primitive des courbes coupées, la constante dont les différentes valeurs particularisent chacune de ces courbes, on aura un résultat qui embrassera toutes leurs intersections successives avec la trajectoire, et en sera par conséquent l'équation.

Prenons pour exemple les paraboles ayant même axe et même sommet, et dont l'équation est $y'^n = \alpha x'^m$; il viendra $p = \frac{m\alpha x'^{m-1}}{n y'^{n-1}}$. Nous pourrons chasser immédiatement de cette expression, au moyen de l'équation proposée, le paramètre α qui particularise chaque parabole d'un même degré; substituant le résultat dans l'équation (A), après avoir changé x' et y' en x et en y, et divisant ensuite par $x^{m-1}y^{n-1}$, nous trouverons

$$a(n x \mathrm{d}x + m y \mathrm{d}y) + m y \mathrm{d}x - n x \mathrm{d}y = 0.$$

Cette équation étant homogène, peut se traiter par le procédé du n°. 255. Lorsqu'on a $m = n = 1$, elle devient intégrable en la divisant par x^2+y^2, puisque

$$\frac{x \mathrm{d}x + y \mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}.\mathrm{l}\sqrt{x^2+y^2},$$

et que $\frac{y \mathrm{d}x - x \mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}.\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{y}\right)$ (262); on a donc

$$a \mathrm{l}\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{y}\right) = C,$$

$$\text{ou } a \mathrm{l}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right),$$

en changeant la constante arbitraire. Si on fait

$$\sqrt{x^2+y^2}=u, \text{ arc}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)=t,$$

on retombera sur l'équation des spirales logarithmiques qui ont la propriété de couper leur rayon vecteur sous un angle constant (114); et en effet, dans le cas actuel les courbes coupées ne sont autre chose que toutes les lignes droites menées par l'origine des coordonnées, et dont l'équation est $y'=\alpha x'$.

Si on vouloit que l'angle TMt fût droit, il faudroit supposer a infini, et par conséquent ne tenir compte que des termes qu'il multiplie; l'équation ci-dessus se réduiroit à $nxdx+mydy=0$, dont l'intégrale $nx^2+my^2=c$, nous apprend que la courbe qui coupe à angles droits toutes les paraboles proposées est une ellipse décrites ur le même axe que ces courbes, ayant pour centre leur sommet commun. Les trajectoires, pour lesquelles l'angle TMt est droit, s'appellent *trajectoires orthogonales;* leur équation générale est $1+p\frac{dy}{dx}=0$, et s'obtient en faisant a infini dans l'équation (A).

284. Les considérations géométriques conduisent aussi à la théorie des solutions particulières, que nous avons exposée dans le n°. 272. Proposons-nous ce problème: *trouver une courbe telle que toutes les perpendiculaires abaissées d'un point donné, sur les tangentes de cette courbe, soient égales.* Pour parvenir à l'équation différentielle, il faut se rappeler qu'en nommant x' et y' les coordonnées d'une courbe, et x et y celles de sa tangente, l'équation de cette droite est $y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$ (67);

prenant pour origine des coordonnées le point connu duquel doivent être abaissées toutes les perpendiculaires, chacune d'elles aura pour équation $y = -\frac{dx'}{dy'}x$ (Trig. 67), et sa longueur sera exprimée par $\sqrt{x^2+y^2}$. En mettant pour x et pour y les coordonnées du point où elle rencontre la tangente qui lui correspond, et dont les valeurs s'obtiennent en déterminant x et y par les deux équations ci-dessus (Trig. 68), on aura, en vertu de ces équations,

$$x = \frac{(x'dy' - y'dx')dy'}{dx'^2+dy'^2}, \quad y = -\frac{(x'dy' - y'dx')dx'}{dx'^2+dy'^2},$$

et $$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x'dy' - y'dx'}{\sqrt{dx'^2+dy'^2}} = n;$$

l'équation différentielle de la courbe cherchée sera donc $x'dy' - y'dx' = n\sqrt{dx'^2+dy'^2}$.

Cela posé, il est facile de voir que le cercle, dont le rayon $= n$, et dont le centre est l'origine des coordonnées, satisfait à la question. Ce cercle ayant pour équation $y'^2 + x'^2 = n^2$, est précisément la solution que nous avons trouvée n°. 273; mais toute ligne droite, située, par rapport à l'origine des coordonnées, de manière que sa plus courte distance à ce point, soit égale à n, résout également le problême proposé, et comme il y a une infinité de lignes droites qui peuvent remplir cette condition, c'est dans l'équation qui les comprend toutes que réside l'intégrale complète de l'équation différentielle trouvée ci-dessus, et qui est en effet $y' - cx' = n\sqrt{1+c^2}$ (270).

Une circonstance digne de remarque et qui s'apperçoit sur-le-champ, c'est que toutes les lignes droites

dont on vient de parler seront nécessairement touchées par le cercle qui représente la solution particulière, puisqu'il a pour rayon la perpendiculaire abaissée sur chacune d'elles.

La même relation a lieu entre les diverses courbes que représente l'intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre, et celle qui résulte d'une solution particulière de cette équation ; la dernière touche toutes les autres. En effet, l'équation différentielle ne détermine que la direction de la tangente, et toute courbe qui, dans un point quelconque, aura la même tangente que l'une des courbes déduites de l'intégrale complète, y satisfera nécessairement : or, c'est ce qui arrive à la courbe qui touche toutes celles-ci.

Il suit de là que la développée d'une courbe n'est autre chose que la solution particulière de l'équation différentielle qui représente toutes les normales de la développante (95), et qu'en général les courbes données par les solutions particulières résultent des intersections successives des courbes qui répondent aux diverses valeurs que peut avoir la constante arbitraire dans l'intégrale complète.

La règle donnée, n°. 274, pour trouver les solutions particulières, peut aussi se déduire des considérations géométriques. En effet, si, pour chaque valeur de x, la valeur de $\frac{dy}{dx}$, tirée de l'équation différentielle proposée, convient en même temps à la courbe de la solution particulière et à l'une de celles qui résultent de l'intégrale complète ; il n'en est pas ainsi de la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, lorsqu'il n'y a qu'une osculation du premier ordre entre les deux courbes dont on vient de parler (98).

Il suit de là (90), que l'expression de ce coefficient, trouvée en différentiant l'équation proposée, doit devenir $\frac{0}{0}$ pour tous les points de la courbe qui représente la solution particulière. La même chose arriveroit encore dans le cas où l'osculation seroit d'un ordre plus élevé que le premier; $\frac{d^2y}{dx^2}$ auroit toujours deux valeurs, mais ces valeurs seroient égales.

De l'intégration des équations différentielles du second ordre, par le moyen des transformations.

285. Les équations différentielles du second ordre, les plus simples, sont celles dans lesquelles l'une des variables ne s'élève pas au-delà du premier degré; nous avons déjà traité (222), les équations de cet ordre comprises dans la forme $\frac{d^2y}{dx^2} = X$, X désignant une fonction de x, c'est pourquoi nous passerons tout de suite à celles qui ne renferment que les deux coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$. Faisant pour abréger $\frac{dy}{dx} = p$, nous aurons $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, et l'équation proposée donnera nécessairement $\frac{dp}{dx} = P$, P étant une fonction connue de p. On tirera de là $dx = \frac{dp}{P}$, et par conséquent $x = \int \frac{dp}{P}$; mettant pour dx sa valeur dans l'équation $dy = p\,dx$, on trouvera aussi $y = \int \frac{p\,dp}{P}$: il

ne s'agira plus que d'éliminer p entre les deux équations $x=c+\int\frac{dp}{P}$ et $y=c_1+\int\frac{p\,dp}{P}$, pour avoir l'intégrale en x et y. Elle sera complète, car elle renfermera deux constantes arbitraires ; et il suit en effet du n°. 44, que l'intégrale de toute équation du second ordre n'en peut contenir qu'un pareil nombre. L'élimination de p ne pourra se faire que lorsqu'on aura effectué les intégrations indiquées ; mais, par les quadratures, on construira la courbe cherchée.

Soit pour exemple l'équation $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx\,d^2y}=a$. En mettant pdx pour dy, et $dpdx$ pour d^2y, on changera cette équation en $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dp}=a$, et on en tirera

$$dx=\frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}},\quad dy=p\,dx=\frac{ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'intégration donnera

$$x=C+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\quad y=C_1-\frac{a}{\sqrt{1+p^2}};$$

éliminant p, il viendra $(x-C)^2+(y-C_1)^2=a^2$.

L'équation différentielle proposée n'est autre chose que l'expression générale du rayon de courbure, égalée à une constante a (99) ; et, comme on devoit s'y attendre, l'intégrale est l'équation du cercle ayant cette constante pour rayon.

286. Il est à propos de remarquer que les équations $x=C+\int\frac{dp}{P}$ et $y=C_1+\int\frac{p\,dp}{P}$ satisfont,

chacune en particulier, à l'équation différentielle $\frac{dp}{dx}=P$, et qu'en supposant les seconds membres intégrés, elles ne seroient que du premier ordre : il y a donc dans ce cas deux équations de cet ordre qui satisfont à l'équation proposée du second, et qui en sont par conséquent les intégrales, tandis qu'une équation du premier ordre n'a qu'une seule intégrale. Il est facile d'appercevoir la raison de cette différence.

Soit $U=0$, une équation primitive entre x, y et deux constantes c et c_1 ; si on différentie deux fois de suite cette équation, on pourra éliminer entre $U=0$, $dU=0$, $d^2U=0$, les deux constantes, et arriver ainsi à une équation du second ordre qui en soit indépendante ; mais la combinaison des équations $U=0$ et $dU=0$ conduira à deux équations différentes du premier ordre : l'une résultera de l'élimination de c_1, et l'autre de celle de c. Représentons-les par $V=0$, $V_1=0$; il est évident que l'on parviendra à l'équation du second ordre, en éliminant c entre $V=0$ et $dV=0$, ou bien c_1 entre $V_1=0$ et $dV_1=0$: chacune des équations $V=0$, $V_1=0$, est donc l'intégrale de celle du second ordre. On les appelle *intégrales premières*, pour les distinguer de l'équation primitive $U=0$, qui est l'*intégrale seconde*.

Il est facile de voir que l'on déduira l'équation $U=0$, des deux équations $V=0$ et $V_1=0$, en éliminant entr'elles le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}=0$, et que par conséquent on aura l'intégrale seconde ou l'équation primitive d'une équation du second ordre, lorsque l'on connoîtra ses deux intégrales premières, et qu'on pourra en chasser $\frac{dy}{dx}$.

Ces remarques s'étendent aux équations de tous les ordres. Pour le troisième, par exemple, l'équation primitive doit contenir trois constantes arbitraires (44); on parvient à l'équation différentielle de cet ordre, en éliminant ces constantes entre les équations

$$U=0,\ \mathrm{d}U=0,\ \mathrm{d}^2U=0,\ \mathrm{d}^3U=0;$$

mais si on n'en chasse que deux, on aura trois équations différentielles du second ordre, puisqu'on pourra conserver chacune d'elles à son tour. Les équations qu'on obtient ainsi, sont des *intégrales premières* de l'équation différentielle du troisième ordre, qui résultera nécessairement de l'élimination de la constante qu'elles renferment. Les *intégrales secondes* sont ici les équations du premier ordre que donne l'élimination de chacune des constantes entre les équations $U=0$ et $\mathrm{d}U=0$, et l'équation primitive $U=0$ est l'*intégrale troisième*. Nous ne pousserons pas plus loin ces considérations; nous en conclurons seulement qu'*une équation différentielle de l'ordre* n *a un nombre* n *d'intégrales premières*, et comme ces intégrales sont de l'ordre $n-1$, elles ne renferment que les $n-1$ coefficiens

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\ \ldots\ldots\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}};$$

si donc on peut les éliminer, on aura l'intégrale n^{me}, ou l'équation primitive qui répond à l'équation différentielle proposée.

287. Nous nous occuperons dans cet article de l'équation $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=Y$, Y désignant une fonction quelconque de y. Si on fait $\mathrm{d}y=p\,\mathrm{d}x$, on en peut tirer $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{p}$,

ce qui donne $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{p\,dp}{dy}$; substituant dans la proposée, il en résulte $p\,dp=Y\,dy$, et en intégrant, on trouve $p^2=2\int Y\,dy+C$, d'où il suit

$$p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{C+2\int Y\,dy} \text{ et } x=\int\frac{dy}{\sqrt{C+2\int Y dy}}+C_1.$$

Il est bon d'observer que l'intégration ci-dessus peut s'effectuer en multipliant la proposée par dy; car il vient alors $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx}=Y\,dy$, et comme $\frac{d^2y}{dx}=d.\frac{dy}{dx}$, on a $\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\int Y\,dy+C$, ou $\frac{dy}{dx}=\sqrt{2C+2\int Y dy}$.

Appliquons ce procédé à l'équation $d^2y\sqrt{ay}=dx^2$; nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{ay}},\quad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx}=\frac{dy}{\sqrt{ay}},$$

$$\text{et } \tfrac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2}{a}\sqrt{ay}+C,$$

en intégrant. Changeant C en $\frac{2c}{\sqrt{a}}$, nous tirerons de là

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{4}{\sqrt{a}}(\sqrt{y}+c),\quad \frac{2\,dx}{\sqrt[4]{a}}=\frac{dy}{\sqrt{c+\sqrt{y}}};$$

faisant ensuite $c+\sqrt{y}=z$, il viendra

$$\frac{dx}{\sqrt[4]{a}}=\frac{(z-c)\,dz}{\sqrt{z}}=(z^{\frac{1}{2}}-cz^{-\frac{1}{2}})\,dz,$$

et enfin

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a}}=\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}-2cz^{\frac{1}{2}}+c_1=\tfrac{2}{3}(\sqrt{y}-c)\sqrt{c+\sqrt{y}}+c_1.$$

288.

288. On a vu dans le Calcul différentiel (115), que passé le premier ordre la forme des expressions différentielles changeoit, suivant qu'on prenoit x ou y, ou même une fonction de ces quantités pour *variable indépendante*, et que cela revenoit à regarder successivement comme une constante dx, ou dy, ou une fonction donnée de ces différentielles et de leurs variables; il est donc nécessaire, lorsqu'on se propose d'intégrer une équation du second ordre, de savoir dans laquelle de ces hypothèses elle a été calculée. Les exemples précédens répondoient tous à la supposition de y égal à une fonction de x, et par conséquent de dx constant; mais il sera facile de reconnoître parmi les équations relatives à d'autres hypothèses, celles qui peuvent s'y rapporter.

Il est d'abord évident, qu'en désignant par Q une fonction quelconque de $\frac{dx}{dy}$, toute équation de la forme $\frac{d^2x}{dy^2}=Q$, et dans laquelle dy est regardé comme constant, se traitera de même que celle du n°. 285, en faisant $\frac{dx}{dy}=q$, et $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{dq}{dy}$. On peut encore la ramener immédiatement à la forme $\frac{d^2y}{dx^2}=P$, en passant, par le procédé du n°. 116, à la supposition de dx constant, ce qui se fera, par la substitution de $-\frac{dx\,d^2y}{dy^3}$, à la place de $\frac{d^2x}{dy^2}$.

Si l'équation proposée eût été prise dans l'hypothèse de $\sqrt{dx^2+dy^2}$ constant, et qu'elle ne renfermât que

dx, dy, d^2y, ou dy, dx, d^2x, elle rentreroit encore dans le cas du n°. 285, après qu'on l'auroit transformée en une autre dans laquelle dx fût constant.

289. Passons maintenant aux équations qui contiennent les deux coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ et la variable x. Il est évident que ces équations se ramènent sur le champ au premier ordre, par la substitution de $p\,dx$ et de $dp\,dx$, au lieu de dy et de d^2y. Si on peut intégrer la transformée, et que l'on parvienne à en tirer l'expression de p en x, on obtiendra y par l'équation $y=\int p\,dx$; et si cette transformée donnoit x en p, on feroit usage de la formule

$$y=px-\int x\,dp \quad (148).$$

Nous ne nous arrêterons point à détailler les différens cas intégrables que présentent les équations proposées; ils se découvriront aisément par l'application des divers procédés enseignés précédemment pour intégrer les équations du premier ordre.

Si les équations proposées étoient entre $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ et y, on les ramèneroit au cas précédent en prenant dy constant, au lieu de dx, ou bien en chassant dx, au moyen de sa valeur $\frac{dy}{p}$, tirée de l'équation $dy=p\,dx$; et on auroit ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{p\,dp}{dy}:$$

la transformée ne renfermeroit alors que p, dp et dy. Quand elle pourra s'intégrer, et qu'elle donnera p en y,

on trouvera x par la formule $x=\int\frac{dy}{p}$, et par la formule $x=\frac{y}{p}+\int\frac{y\,dp}{p^2}$, lorsqu'on aura y en p.

290. Ces deux méthodes conduisent aux équations des courbes dont le rayon de courbure est exprimé en fonction de l'une ou de l'autre des coordonnées. Soit, par exemple, X la fonction de x supposée égale à ce rayon dans la courbe demandée; l'équation différentielle sera (99)

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx\,d^2y}=X, \text{ ou } \frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}dx}{dp}=X,$$

ou enfin

$$\frac{dx}{X}=\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

En intégrant il vient

$$\int\frac{dx}{X}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}};$$

représentons $\int\frac{dx}{X}$ par V et nous aurons

$$p=\frac{V}{\sqrt{1-V^2}}, \quad y=\int p\,dx=\int\frac{V\,dx}{\sqrt{1-V^2}}.$$

291. L'équation du premier degré et du second ordre dont la forme est

$$d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=R\,dx^2,$$

P, Q et R désignant des fonctions de x, se présente immédiatement après celles que nous venons de traiter, et se ramène à l'équation

$$d^2z+P\,dx\,dz+Qz\,dx^2=0,$$

par la même transformation qui nous a servi dans le n°. 257 à faire dépendre

$$dy+Pydx=Q, \text{ de } dz+Pzdx=0.$$

En effet, la supposition de $y=Xz$ donne

$$dy=Xdz+zdX,$$
$$d^2y=Xd^2z+2dXdz+zd^2X$$

et change l'équation proposée en

$$X(d^2z+Pdxdz+Qzdx^2)$$
$$+2dXdz+Pzd Xdx+zd^2X=Rdx^2.$$

Si on fait

$$d^2z+Pdxdz+Qzdx^2=0,$$

et qu'on parvienne à tirer de cette équation la valeur de z en x, on aura pour déterminer la fonction X, l'équation

$$2dXdz+Pzd Xdx+zd^2X=Rdx^2,$$

qui, par rapport aux variables x et X, rentre dans celles du n°. 289; et faisant $dX=X'dx$, elle se changera en

$$2X'dz+PzX'dx+zdX'=Rdx,$$

ou $$dX'+\left(P+\frac{2dz}{zdx}\right)X'dx=\frac{Rdx}{z}.$$

Cette équation n'étant que du premier degré et du premier ordre par rapport à X', conduit (257) à

$$X'=e^{-\int\left(Pdx+\frac{2dz}{z}\right)}\left[\int e^{\int\left(Pdx+\frac{2dz}{z}\right)}\frac{Rdx}{z}+C\right],$$

résultat qui devient

$$X'=\frac{e^{-\int Pdx}}{z^2}\int\left[e^{\int Pdx}Rzdx+C\right],$$

en observant que

$$e^{-\int\frac{2dz}{z}}=\frac{1}{z^2},\qquad e^{\int\frac{2dz}{z}}=z^2;$$

on aura ensuite

$$X=\int X'\mathrm{d}x+C,\qquad y=z\int X'\mathrm{d}x+C_1z.$$

292. Il faut bien remarquer qu'il n'est pas nécessaire d'avoir l'intégrale complète de l'équation

$$\mathrm{d}^2z+P\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+Qz\,\mathrm{d}x^2=0,$$

mais seulement une valeur particulière de z, qui y satisfasse; car les constantes arbitraires sont comprises implicitement dans l'expression de y.

Le calcul précédent fait voir encore que de cette valeur de z on déduiroit aussi l'intégrale complète de l'équation en z; car si l'on fait $R=0$, l'équation en y deviendra semblable à celle-ci, on aura

$$X'=\frac{Ce^{-\int P\mathrm{d}x}}{z^2},\qquad X=\int X'\mathrm{d}x+C;$$

et

$$y=z\int X'\mathrm{d}x+C_1z$$

sera l'intégrale complète de l'équation

$$\mathrm{d}^2y+P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+Qy\,\mathrm{d}x^2=0,$$

z étant alors une valeur particulière de y.

Si on parvient à connoître deux valeurs particulières z et z_1, de y, on formera l'intégrale complète de l'équation ci-dessus, en prenant

$$y=Cz+C_1z_1,$$

C et C_1 désignant deux constantes arbitraires; en effet, on aura

$$\mathrm{d}y=C\mathrm{d}z+C_1\mathrm{d}z_1$$
$$\mathrm{d}^2y=C\mathrm{d}^2z+C_1\mathrm{d}^2z_1,$$

et l'équation proposée devenant par la substitution de ces valeurs

$$\left.\begin{matrix} C(\mathrm{d}^2z + P\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + Qz\,\mathrm{d}x^2) \\ + C_1(\mathrm{d}^2z_1 + P\mathrm{d}z_1\mathrm{d}x + Qz_1\mathrm{d}x^2) \end{matrix}\right\} = 0$$

sera satisfaite indépendamment des constantes C et C_1, en vertu de l'hypothèse établie sur z et z_1, puisque les quantités qui multiplient ces constantes s'évanouissent en même temps que le premier membre de l'équation proposée.

293. L'équation

$$\mathrm{d}^2z + P\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + Q\,z\,\mathrm{d}x^2 = 0$$

se ramène au premier ordre, en faisant $z = e^{\int t\mathrm{d}x}$, t désignant une nouvelle variable; car on a par ce moyen

$$\mathrm{d}z = e^{\int t\mathrm{d}x}\,t\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}^2z = e^{\int t\mathrm{d}x}(t^2\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x),$$

la fonction $e^{\int t\mathrm{d}x}$ devient facteur commun de l'équation proposée qui se réduit à

$$t^2\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + Pt\,\mathrm{d}x^2 + Q\mathrm{d}x^2 = 0,$$

ou à $$\mathrm{d}t + (t^2 + Pt + Q)\mathrm{d}x = 0\ (*).$$

294. Lorsque les coefficiens P et Q sont constans, désignons-les par A et B: l'équation

$$\mathrm{d}t + (t^2 + Pt + Q)\mathrm{d}x = 0$$

devient

$$\mathrm{d}t + (t^2 + At + B)\mathrm{d}x = 0,$$

(*) Il est bon de remarquer que la transformation effectuée ci-dessus ramènera en général, au premier ordre toute équation du second, homogène par rapport aux quantités ζ, $\mathrm{d}\zeta$, $\mathrm{d}^2\zeta$, considérées comme des variables distinctes.

et se trouve séparée en lui donnant la forme

$$\frac{dt}{(t^2+Pt+Q)}+dx=0;$$

mais comme on n'a besoin que d'y satisfaire, on aperçoit facilement que si l'on fait $t=m$, m étant une constante, on aura $dt=0$, et

$$m^2+Am+B=0.$$

Cette dernière équation donne en général deux valeurs pour m; si on les représente par m' et m'', on aura aussi pour $e^{\int t\,dx}$ deux valeurs, savoir:

$$e^{\int m'\,dx}=e^{m'x}, \qquad e^{\int m''\,dx}=e^{m''x},$$

et l'on en conclura

$$z=Ce^{m'x}+C_1e^{m''x},$$

valeur complète de z.

295. Quand les valeurs de m sont imaginaires, et par conséquent de la forme

$$m'=\alpha+\beta\sqrt{-1}, \qquad m''=\alpha-\beta\sqrt{-1},$$

on a

$$z=Ce^{\alpha x+\beta x\sqrt{-1}}+C_1e^{\alpha x-\beta x\sqrt{-1}}$$
$$=e^{\alpha x}\left(Ce^{\beta x\sqrt{-1}}+C_1e^{-\beta x\sqrt{-1}}\right);$$

on rend ce résultat réel, en exprimant les exponentielles imaginaires par le moyen des sinus et des cosinus. Il vient (164)

$$e^{\beta x\sqrt{-1}}=\cos\beta x+\sqrt{-1}\sin\beta x,$$
$$e^{-\beta x\sqrt{-1}}=\cos\beta x-\sqrt{-1}\sin\beta x,$$
$$z=e^{\alpha x}[(C+C_1)\cos\beta x+(C-C_1)\sqrt{-1}\sin\beta x];$$

et faisant

$$C+C_1=c, \qquad (C-C_1)\sqrt{-1}=c_1,$$

on a

$$z=e^{\alpha x}(c\cos\beta x+c_1\sin\beta x)$$

ou bien

$$z=pe^{\alpha x}\sin(\beta x+q)$$

prenant

$$c=p\sin q, \qquad c_1=p\cos q.$$

Lorsque les racines m' et m'' sont égales, la valeur de z, réduite à

$$Ce^{m'x}+C_1e^{m'x}=e^{m'x}(C+C_1),$$

devient incomplète; il faudroit dans ce cas se servir de la valeur particulière $z=e^{m'x}$ pour obtenir l'intégrale complète, suivant le procédé du n°. 292; mais on y parvient plus facilement par des considérations analogues à celles du n°. 56, en supposant que m'' diffère de m' d'une quantité très-petite.

Soit en général $m''=m'+k$; il en résulte

$$z=Ce^{m'x}+C_1e^{m'x+kx}=e^{m'x}(C+C_1e^{kx});$$

développant e^{kx} suivant les puissances de k, on a

$$z=e^{m'x}\left(C+C_1+C_1kx+C_1kx.\frac{kx}{2}+\text{etc.}\right)$$

$$=e^{m'x}\left(c+cx+c_1\frac{kx^2}{2}+\text{etc.}\right)$$

en posant $\qquad C+C_1=c, \qquad C_1k=c_1.$

Cette dernière expression qui satisfait à la proposée pour toutes les valeurs de k, convient encore, si $k=0$, ou si $m''=m'$, et se réduit alors à

$$z=e^{m'x}(cx+c_1).$$

296. Passons à l'équation plus générale

$$d^2y+A\,dy\,dx+By\,dx^2=R\,dx^2.$$

On a pour l'équation

$$d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=R\,dx^2,$$

d'après les formules du n°. 291,

$$y=z\int X'\,dx+C_1z$$

$$=C_1z+z\int\frac{e^{-\int P\,dx}}{z^2}\,dx\left(\int e^{\int P\,dx}Rz\,dx+C\right);$$

cette expression, renfermant deux constantes arbitraires, est complète, en sorte qu'il ne s'agit plus que d'y substituer une valeur particulière de z. L'équation proposée, dans laquelle les coefficiens A et B sont constans, conduit à

$$d^2z+A\,dx\,dz+Bz\,dx^2=0;$$

on satisfait à cette dernière en supposant $z=e^{mx}$, m étant déterminée par l'équation

$$m^2+Am+B=0:$$

on aura donc, à cause de $P=A$,

$$y=C_1e^{mx}+e^{mx}\int e^{-(A+2m)x}dx\left(\int e^{(A+m)x}R\,dx+C\right)$$

$$=C_1e^{mx}-\frac{Ce^{-(A+m)x}}{A+2m}+e^{mx}\int e^{-(A+2m)x}dx\int e^{(A+m)x}R\,dx.$$

En intégrant par parties, on trouvera que

$$\int e^{-(A+2m)x}dx\int e^{(A+m)x}R\,dx$$

$$=\frac{-e^{-(A+2m)x}\int e^{(A+m)x}R\,dx+\int e^{-mx}R\,dx}{A+2m}\ (*);$$

si on substitue cette valeur dans l'expression de y, et qu'après les réductions on mette n à la place de $-(A+m)$, il viendra

$$y=C_1e^{mx}-\frac{Ce^{nx}}{m-n}$$

$$+\frac{e^{mx}\int e^{-mx}R\,dx-e^{nx}\int e^{-nx}R\,dx}{m-n},$$

(*) La formule à intégrer ici revient à

$$\int dU\int V\,dx=U\int V\,dx-\int UV\,dx\ (322).$$

ou, en changeant la forme des constantes arbitraires,

$$y=ce^{mx}+c_1e^{nx}+\frac{e^{mx}\int e^{-mx}R\,dx-e^{nx}\int e^{-nx}R\,dx}{m-n}.$$

Il est facile de voir que la quantité n est la seconde racine de l'équation $m^2+Am+B=0$, puisque, par l'hypothèse $m+n=-A$.

Lorsque ces racines sont imaginaires, on transforme l'expression de y par le moyen des sinus et des cosinus, comme dans le n°. 295 ; ou bien en supposant dans l'expression générale de y,

$$z=e^{\alpha x}\cos\beta x,\text{ ou }z=e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

valeurs particulières qui résultent de la seconde expression complète de z, dans le n°. cité, lorsqu'on fait $c=0$, ou $c_1=0$, et en intégrant par parties on trouve

$$y=e^{\alpha x}[p\cos\beta x+q\sin\beta x]$$
$$+\frac{e^{\alpha x}[\sin\beta x\int e^{-\alpha x}R\,dx\cos\beta x-\cos\beta x\int e^{-\alpha x}R\,dx\sin\beta x]}{\beta}.$$

Dans le cas où l'on a $m=n$, l'expression trouvée plus haut pour y devient incomplète comme dans le n°. déjà cité; et la seconde partie de cette expression se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$; mais on élude cette difficulté en observant que A devient égal à $-2m$, et que dans cette hypothèse l'équation

$$y=C_1e^{mx}+e^{mx}\int e^{-(A+2m)x}dx\left(\int e^{(A+m)x}R\,dx+C\right)$$

se réduit à

$$y=C_1e^{mx}+e^{mx}\int dx\left(\int e^{-mx}R\,dx+C\right):$$

en intégrant on trouve

$$y=C_1e^{mx}+e^{mx}\left(Cx+x\int e^{-mx}R\,dx-\int e^{-mx}Rx\,dx\right),$$

ou

$$y=e^{mx}(Cx+C_1)+e^{mx}\left(x\int e^{-mx}R\,dx-\int e^{-mx}Rx\,dx\right).$$

On rencontre fréquemment, dans les applications de l'Analyse à la Physique céleste, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = R,$$

pour laquelle

$$m = a\sqrt{-1}, \text{ ou } \alpha = 0 \text{ et } \beta = a;$$

son intégrale sera donc

$$y = p\cos ax + q\sin ax + \frac{\sin ax \int R\,dx \cos ax - \cos ax \int R\,dx \sin ax}{a}.$$

La fonction R a ordinairement la forme

$$A + B\cos\beta x + C\cos\gamma x + \text{etc.}$$

A, B, C, etc. étant des coefficiens constans; β, γ, etc. désignant des nombres entiers, et les intégrations indiquées s'effectuent par le procédé du n°. 196.

297. L'intégration de l'équation

$$d^2z + R\,dz\,dx + Qz\,dx^2 = 0,$$

peut rarement s'effectuer lorsque les coefficiens P et Q sont variables; on y réussit par exemple lorsque

$$P = \frac{A}{a+bx}, \quad Q = \frac{B}{(a+bx)^2}.$$

On a (294)

$$dt + \left(t^2 + \frac{At}{a+bx} + \frac{B}{(a+bx)^2}\right)dx = 0;$$

faisant

$$(a+bx)t = m,$$

il vient

$$(a+bx)\,dm + (m^2 + (A-b)m + B)\,dx = 0.$$

On satisfait encore à cette équation en prenant

$$dm = 0 \text{ et } m^2 + (A-b)m + B = 0,$$

d'où on tire deux valeurs de t, savoir :

$$t=\frac{m'}{a+bx},\quad t=\frac{m''}{a+bx};$$

mais puisque

$$z=e^{\int t\,dx}=e^{\int\frac{m\,dx}{a+bx}}=(a+bx)^{\frac{m}{b}}$$

on aura

$$z=C(a+bx)^{\frac{m'}{b}}+C_1(a+bx)^{\frac{m''}{b}}.$$

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du second ordre.

298. Soit l'équation $d^2y+ax^ny dx^2=0$; si on suppose que la valeur de y, qui satisfait à cette équation, ait la forme

$$Ax^\alpha+Bx^{\alpha+\beta}+Cx^{\alpha+2\beta}+\text{etc.}$$

et que la suite des exposans soit croissante, ou que β soit positif, on pourra, en supposant x très-petite, concevoir que l'expression de y se réduise à son premier terme, parce que les suivans sont trop petits pour être comparables à ce premier; dans cette hypothèse, on pourra se borner à prendre

$$y=Ax^\alpha,\qquad d^2y=\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}dx^2,$$

et l'équation proposée deviendra

$$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}+aAx^{\alpha+n}=0.$$

Il ne sera pas possible de déterminer α, de manière que les deux exposans $\alpha-2$ et $\alpha+n$ deviennent égaux, excepté dans le cas particulier où $n=-2$; mais si l'on suppose x très-petite, on satisfera pourtant à l'équation ci-dessus de deux manières; savoir, en prenant $\alpha=0$ et $\alpha=1$; parce que par l'une et l'autre hypothèse, le terme $\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}$, qui est le plus grand, s'évanouit :

A reste donc indéterminé, et l'on a deux séries, l'une commençant par A et l'autre par Ax.

En prenant donc successivement

$$y = A + Bx^{\delta} + Cx^{2\delta} + \text{etc.}$$
$$y = Ax + Bx^{1+\delta} + Cx^{1+2\delta} + \text{etc.}$$

et substituant ces valeurs, ainsi que les valeurs correspondantes de d^2y, on reconnoîtra, en ordonnant les termes, que δ doit être égal à 2; et déterminant dans chaque cas les coefficiens A, B, C, etc. on parviendra à ces deux séries:

$$A - \frac{aAx^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^2Ax^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} - \frac{a^3Ax^{3n+6}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} + \text{etc.}$$

$$Ax - \frac{aAx^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \frac{a^2Ax^{2n+5}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)} - \frac{a^3Ax^{3n+7}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)} + \text{etc.}$$

Les développemens rapportés plus haut ne sont que particuliers, puisqu'ils ne contiennent que la constante arbitraire A; mais en écrivant dans le dernier A_1 à la place de A, et prenant ensuite leur somme, on aura (292) une expression générale de y.

299. Tout ce qui a été dit dans le n°. 279, sur les équations du premier ordre, peut s'appliquer à celles du second, avec cette seule différence que le second terme des séries rapportées dans cet article doit être regardé comme arbitraire, puisque l'équation proposée ne donne que le coefficient $\frac{d^2b}{da^2}$ et ceux qui le suivent. Pour dé-

De l'intégration des équations différentielles des ordres supérieurs au second.

301. La difficulté d'intégrer les équations différentielles devient d'autant plus grande que ces équations sont d'un ordre plus élevé ; au delà du second on ne réussit que sur un petit nombre de classes d'équations. Nous ne nous occuperons point ici des équations comprises dans la formule $d^n y = X dx^n$, déjà traitée n°. 222. L'équation $d^n y = Y dx^n$, dans laquelle Y désigne une fonction de y, ne peut en général s'abaisser qu'à l'ordre inférieur. Pour y parvenir, on la changera par les formules du n°. 116, dans une autre où la différentielle dy soit prise pour constante, et on fera ensuite

$$dx = p'dy, d^2x = dp'dy, \ldots\ldots d^n x = d^{n-1}p'dy.$$

Soit f une fonction quelconque ; l'intégration de toutes les équations comprises dans la série suivante

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

ne dépendra que de celle des fonctions d'une seule variable. Cela est évident pour la première, qui donne sur le champ $dx = \frac{dy}{f(y)}$; et pour traiter les autres, on fera

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = r, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = s, \text{ etc.}$$

elles deviendront par ce moyen

$$q = f(p), \quad r = f(q), \quad s = f(r) \text{ etc.}$$

mais

mais comme on aura

$$dp=q\,dx,\quad dq=r\,dx,\quad dr=s\,dx,\ \text{etc.}$$

on obtiendra successivement

$$dx=\frac{dp}{q}=\frac{dp}{f(p)},\quad dx=\frac{dq}{r}=\frac{dq}{f(q)},$$
$$dx=\frac{dr}{s}=\frac{dr}{f(r)},\ \text{etc.}$$

d'où on tirera

$$x=\int\frac{dp}{f(p)},\quad x=\int\frac{dq}{f(q)},\quad x=\int\frac{dr}{f(r)},\ \text{etc.}$$

ensuite à cause de

$$y=\int p\,dx,\quad y=\int dx\int q\,dx,\quad y=\int dx\int dx\int r\,dx,\ \text{etc.}$$

il viendra

$$y=\int\frac{p\,dp}{f(p)},\quad y=\int\frac{dq}{f(q)}\int\frac{q\,dq}{f(q)},$$
$$y=\int\frac{dr}{f(r)}\int\frac{dr}{f(r)}\int\frac{r\,dr}{f(r)},\ \text{etc.}$$

Les équations

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y),\quad \frac{d^3y}{dx^3}=f\left(\frac{dy}{dx}\right),\ldots\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-1}}\right)$$

s'intégrent aussi ; la première a déjà été traitée n°. 287: en conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, les autres deviennent

$$q=f(y),\quad r=f(p),\quad s=f(q),\ \text{etc.}$$

multipliant ensuite les deux membres de la première par $p\,dx$, ceux de la seconde par $q\,dx$, ceux de la troisième par $r\,dx$, et observant que

$$p\,dx=dy,\quad q\,dx=dp,\quad r\,dx=dq,\quad s\,dx=dr,\ \text{etc.}$$

il vient

$$p\,dp=f(y)\,dy,\quad q\,dq=f(p)\,dp,\quad r\,dr=f(q)\,dq,\ \text{etc.}$$

ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}p^2=\int f(y)\,dy,\quad \tfrac{1}{2}q^2=\int f(p)\,dp,\quad \tfrac{1}{2}r^2=\int f(q)\,dq,\ \text{etc.}$$

Mais comme

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{dp}{q}=\frac{dq}{r}=\frac{dr}{s},\ \text{etc.}$$

on aura

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy}},\quad dx=\frac{dp}{\sqrt{2\int f(p)\,dp}},$$

$$dx=\frac{dq}{\sqrt{2\int f(q)\,dq}},\ \text{etc.}$$

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy}},\quad x=\int\frac{dp}{\sqrt{2\int f(p)\,dp}},$$

$$x=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int f(q)\,dp}},\ \text{etc.}$$

et d'après les formules employées plus haut

$$y=\int\frac{p\,dp}{\sqrt{2\int f(p)\,dp}},\quad y=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int f(q)\,dq}}\int\frac{q\,dq}{\sqrt{2\int f(q)\,dq}}\ \text{etc.}$$

Il est facile de voir que les mêmes transformations réduiront à l'ordre $n-1$, toute équation de l'ordre n dans laquelle il n'entrera que les différentielles des deux variables, avec l'une d'elles seulement.

302. Les équations du premier degré offrent dans tous les ordres, des propriétés analogues à celles que nous leur avons trouvées pour le second (291, 292) : 1°. l'intégration de l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\ldots\ldots+Uy=V,$$

ou

$$d^ny+Pd^{n-1}y\,dx+Qd^{n-2}y\,dx^2\ldots+Uy\,dx^n=V\,dx^n,$$

dans laquelle P, Q, ... U et V, désignent des fonctions de x, et qui ne renferme que les premières puissances de y et de ses différentielles, ne dépend que de celle de l'équation

$$d^n z + P d^{n-1} z dx + Q d^{n-2} z dx^2 \ldots\ldots + U z dx^n = 0.$$

2°. Il suffit de connoître un nombre n de valeurs particulières de z, pour obtenir sur-le-champ l'expression générale de cette fonction, en sorte que si on désigne par z_1, z_2, z_3, ... z_n, ces valeurs, on aura

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 \ldots\ldots + C_n z_n,$$

C_1, C_2, ... C_n, étant des constantes arbitraires.

Cette dernière proposition est facile à prouver; car il est évident que chacune des équations

$$C_1(d^n z_1 + P d^{n-1} z_1 dx + Q d^{n-2} z_1 dx^2 \ldots + U z_1 dx^n) = 0$$
$$C_2(d^n z_2 + P d^{n-1} z_2 dx + Q d^{n-2} z_2 dx^2 \ldots + U z_2 dx^n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n(d^n z_n + P d^{n-1} z_n dx + Q d^{n-2} z_n dx^2 \ldots + U z_n dx^n) = 0,$$

étant identique, par l'hypothèse, leur somme donnera une équation identique, qui sera précisément celle qu'on obtiendroit en mettant dans la proposée, à la place de z et de ses différentielles, les valeurs qui résultent de l'expression générale de z.

La démonstration de la première proposition n'offre guère plus de difficulté. Supposons que la valeur de y soit de la même forme que celle de z, mais que les quantités C_1, C_2, C_3, ... au lieu d'être constantes comme ci-dessus, soient des fonctions de x; et pour fixer les idées, prenons l'équation proposée du troisième ordre seulement: nous aurons $y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$, expression dans laquelle il faudra déterminer C_1, C_2 et C_3, de manière qu'elle satisfasse à

$$d^3 y + P d^2 y dx + Q dy dx^2 + U y dx^3 = V dx^3.$$

Formons successivement les valeurs de dy, d^2y et d^3y, en traitant C_1, C_2, C_3, comme des variables ; nous trouverons d'abord

$$dy = C_1 dz_1 + C_2 dz_2 + C_3 dz_3 + z_1 dC_1 + z_2 dC_2 + z_3 dC_3 ;$$

mais comme nous avons trois quantités à déterminer, et que la question proposée ne nous offre qu'une condition, nous en pouvons choisir deux autres à notre gré ; nous ferons en conséquence

$$z_1 d C_1 + z_2 d C_2 + z_3 d C_3 = 0 ,$$

ce qui nous donnera

$$dy = C_1 dz_1 + C_2 dz_2 + C_3 dz_3 .$$

En différentiant cette valeur, il viendra

$$d^2y = C_1 d^2z_1 + C_2 d^2z_2 + C_3 d^2z_3 + dz_1 dC_1 + dz_2 dC_2 + dz_3 dC_3 ;$$

posant encore

$$dz_1 d C_1 + dz_2 d C_2 + dz_3 d C_3 = 0 ,$$

il restera

$$d^2y = C_1 d^2z_1 + C_2 d^2z_2 + C_3 d^2z_3 ,$$

d'où nous tirerons

$$d^3y = C_1 d^3z_1 + C_2 d^3z_2 + C_3 d^3z_3 + d^2z_1 dC_1 + d^2z_2 dC_2 + d^2z_3 dC_3 .$$

Par la substitution des valeurs de y, dy, d^2y et d^3y, l'équation proposée deviendra

$$\left.\begin{array}{l} C_1(d^3z_1 + Pd^2z_1 dx + Qdz_1 dx^2 + Uz_1 dx^3) \\ + C_2(d^3z_2 + Pd^2z_2 dx + Qdz_2 dx^2 + Uz_2 dx^3) \\ + C_3(d^3z_3 + Pd^2z_3 dx + Qdz_3 dx^2 + Uz_3 dx^3) \\ + d^2z_1 dC_1 + d^2z_2 dC_2 + d^2z_3 dC_3 \end{array}\right\} = V dx^3 ,$$

et se réduira à

$$d^2z_1 dC_1 + d^2z_2 dC_2 + d^2z_3 dC_3 = V dx^3 ,$$

puisque les fonctions z_1, z_2 et z_3, satisfont à l'équation

$$d^3z + P d^2z dx + Q dz dx^2 + U z dx^3 = 0.$$

Nous aurons entre les différentielles dC_1, dC_2 et dC_3, les trois équations

$$\left.\begin{aligned} z_1 dC_1 + z_2 dC_2 + z_3 dC_3 &= 0 \\ dz_1 dC_1 + dz_2 dC_2 + dz_3 dC_3 &= 0 \\ d^2z_1 dC_1 + d^2z_2 dC_2 + d^2z_3 dC_3 &= V dx^3, \end{aligned}\right\}$$

dont nous tirerons les valeurs de chacune de ces différentielles exprimées en x et en dx, lorsque celles de z_1, z_2, z_3, etc. seront connues. On en déduira par l'élimination des résultats de la forme

$$dC_1 = X_1 dx, \quad dC_2 = X_2 dx, \quad dC_3 = X_3 dx,$$

d'où

$$C_1 = \int X_1 dx + c_1, \quad C_2 = \int X_2 dx + c_2, \quad C_3 = \int X_3 dx + c_3;$$

et par conséquent

$$y = z_1(\int X_1 dx + c_1) + z_2(\int X_2 dx + c_2) + z_3(\int X_3 dx + c_3)$$

sera l'intégrale complète de l'équation proposée.

Si l'on ne connoissoit que deux valeurs particulières de z, la proposée ne pourroit s'intégrer qu'avec le secours d'une équation du second ordre. En effet, on auroit alors

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2, \quad dy = C_1 dz_1 + C_2 dz_2,$$

en faisant

$$z_1 dC_1 + z_2 dC_2 = 0;$$

mais on ne pourroit disposer que d'une seule des quantités C_1 et C_2, il faudroit employer le développement complet de d^2y, qui seroit

$$d^2y = C_1 d^2z_1 + C_2 d^2z_2 + dz_1 dC_1 + dz_2 dC_2,$$

ce qui donneroit

$$d^3y=C_1d^3z_1+C_2d^3z_2+2d^2z_1dC_1+2d^2z_2dC_2 \\ +dz_1d^2C_1+dz_2d^2C_2$$

substituant dans la proposée, et réduisant de la même manière que ci-dessus, on obtiendroit

$$\left.\begin{array}{l} dz_1d^2C_1+dz_2d^2C_2+2d^2z_1dC_1+2d^2z_2dC_2 \\ +Pdz_1dC_1dx+Pdz_2dC_2dx \end{array}\right\}=Vdx^3,$$

équation de laquelle on chassera dC_2 et d^2C_2, en tirant leurs valeurs de l'équation $z_1dC_1+z_2dC_2=0$, et de sa différentielle; la résultante ne contenant que d^2C_1, dC_1 et des fonctions de x, se ramenera au premier ordre (289).

Enfin, lorsqu'on n'aura qu'une seule valeur de z, on tombera sur une équation auxiliaire du troisième ordre, réductible au second; c'est ce dont il est facile de se convaincre, en mettant dans la proposée,

$$C_1z_1,\quad C_1dz_1+z_1dC_1,\quad C_1d^2z_1+2dz_1dC_1+z_1d^2C_1, \\ C_1d^3z_1+3d^2z_1dC_1+3dz_1d^2C_1+z_1d^3C_1,$$

au lieu de

$$y,\ dy\ d^2y \text{ et } d^3y:$$

l'équation produite par ces substitutions pourra se réduire à

$$\left.\begin{array}{l} z_1d^3C_1+3dz_1d^2C_1+3d^2z_1dC_1 \\ +Pz_1d^2C_1dx+2Pdz_1dC_1dx \\ +Qz_1dC_1dx^2 \end{array}\right\}=Vdx^3.$$

Si l'on suppose $V=0$, l'équation en y devient la même que celle qui doit donner z, et par conséquent les calculs précédens feront voir comment avec deux, ou seulement une valeur particulière de cette fonction, on peut parvenir à son expression générale. La méthode que nous avons appliquée à l'équation du premier degré

et du troisième ordre, convenant aux équations du même degré dans tous les ordres, il doit exister pour chaque ordre des propositions analogues à celles que nous venons de prouver. Nous conclurons donc de ce qui précède, que *si l'on a un nombre* n *de valeurs particulières de* z, *on en déduira immédiatement l'expression générale de cette fonction, et que l'on parviendra à la même expression, dans le cas où l'on ne connoîtroit que* n—1 *valeurs particulières, en intégrant une équation du premier degré et du premier ordre* : cette proposition est due à Lagrange, ainsi que la démonstration que nous venons d'en donner.

303. L'équation

$$d^n z + P d^{n-1} z dx + Q d^{n-2} z dx^2 \ldots + U z dx^n = 0$$

ne peut s'intégrer dans tous les cas ; mais on y satisfait en faisant $z = e^{mx}$, lorsque les coefficiens P, Q, $\ldots U$, sont constans, parce que dans cette hypothèse elle devient divisible par $e^{mx} dx^n$, après la substitution des valeurs de z, dz, d^2z, $\ldots\ldots d^n z$, qui sont

$$e^{mx},\quad e^{mx} m dx,\quad e^{mx} m^2 dx^2, \ldots\ldots e^{mx} m^n dx^n :$$

on trouve alors

$$m^n + P m^{n-1} + Q m^{n-2} \ldots\ldots + U = 0.$$

Si on désigne par m_1, m_2, $\ldots\ldots m_n$, les n racines de cette équation, on aura

$$z_1 = e^{m_1 x},\quad z_2 = e^{m_2 x},\quad \ldots z_n = e^{m_n x},$$

et par conséquent

$$z = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \ldots\ldots + C_n e^{m_n x}.$$

Telle est l'expression générale de z lorsque les racines m_1, m_2, $\ldots$ sont toutes inégales et réelles.

Si, parmi ces racines, il s'en trouve d'imaginaires, comme elles vont toujours par paires de la forme

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha-\beta\sqrt{-1},$$

on pourra faire disparoître les $\sqrt{-1}$, en changeant les exponentielles en sinus et en cosinus, par les formules du n°. 164; et si m_1 et m_2 sont deux racines imaginaires de la même paire, les termes $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$, qu'elles fournissent à la valeur complète de z, deviendront (295)

$$C_1 e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})x} + C_2 e^{(\alpha-\beta\sqrt{-1})x}$$

$$= e^{\alpha x}\left[(C_1+C_2)\cos\beta x + (C_1-C_2)\sqrt{-1}\sin\beta x\right]$$

$$= e^{\alpha x}(c\cos\beta x + c_2\sin\beta x) = pe^{\alpha x}\sin(\beta x+q)$$

Si quelques-unes des racines m_1, m_2, etc. deviennent égales entr'elles, la valeur complète de z perd de sa généralité; parce qu'alors plusieurs des constantes C_1, C_2, C_3, etc. se réduisent à une seule, ainsi qu'on l'a vu pour le deuxième ordre (295). Soit d'abord $m_1=m_2$; les deux termes $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ n'en donneront qu'un, savoir, $(C_1+C_2)e^{m_1 x}$; l'expression de z ne renfermera plus qu'un nombre $n-1$ de constantes arbitraires : mais si on suppose $m_2=m_1+k$, on trouvera

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = e^{m_1 x}(C_1+C_2 e^{kx}) =$$

$$e^{m_1 x}\left[C_1+C_2\left(1+\frac{kx}{1}+\frac{k^2x^2}{1.2}+\text{etc.}\right)\right]$$

$$= e^{m_1 x}\left(c_1+c_2 x+c_3\frac{kx^2}{2}+\text{etc.}\right),$$

(en changeant C_1+C_2 en c_1, et C_2k en c_2) $=e^{m_1x}(c_1+c_2x)$, en faisant $k=0$.

Substituant cette quantité à la place de $C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}$, la valeur de z reprendra la généralité qu'elle doit avoir pour être l'intégrale complète de l'équation proposée; nous aurons donc

$$z=e^{m_1x}(c_1+c_2x)+C_3e^{m_3x}+\text{etc.}$$

Pour arriver au cas où $m_1=m_2=m_3$, nous ferons dans le résultat précédent $m_3=m_1+k'$, et il deviendra

$$z=e^{m_1x}(c_1+c_2x+C_3e^{k'x})+\text{etc.}$$

En développant $e^{k'x}$, nous trouverons

$$z=e^{m_1x}[c_1+C_3+(c_2+C_3k')x+C_3\frac{k'^2x^2}{2}+C_3\frac{k'^3x^3}{2.3}+\text{etc.}]+\text{etc.}$$

changeant les constantes

$$c_1+C_3,\quad c_2+C_3k' \text{ et } C_3\frac{k'^2}{2} \text{ en } c_1,\ c_2 \text{ et } c_3,$$

nous aurons

$$z=e^{m_1x}(c_1+c_2x+c_3x^2+c_3\frac{k'x^3}{3}+\text{etc.})+\text{etc.}$$

et $z=e^{m_1x}(c_1+c_2x+c_3x^2)+\text{etc.}$ lorsque $k'=0$.

On trouvera de la même manière que si l'on a

$$m_1=m_2=m_3=m_4,$$

l'expression générale de z sera

$$z=e^{m_1x}(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)+\text{etc.}$$

et ainsi de suite.

304. Si l'on a un nombre m d'équations différentielles du premier degré, renfermant un nombre $m+1$ de variables, une seule de ces variables sera indépendante, et les m autres en seront des fonctions. Quand ces dernières et leurs coefficiens différentiels ne s'éleveront pas au-delà de la première puissance dans les équations proposées, qui seront alors du premier degré, on pourra, par la méthode indiquée au n°. 119, parvenir à une équation différentielle du premier degré entre l'une des fonctions à déterminer et la variable que l'on regarde comme indépendante; mais on peut quelquefois éviter les calculs de l'élimination, en intégrant conjointement les équations proposées.

305. D'Alembert est le premier qui se soit occupé de l'intégration immédiate de plusieurs équations différentielles, et la méthode qu'il imagina dans cette occasion est trop ingénieuse pour la passer sous silence. Soient 1°. les équations

$$(Mu+Nx)\,dt+P\,du+Q\,dx=T\,dt$$
$$(M'u+N'x)\,dt+P'\,du+Q'\,dx=T'\,dt;$$

si on multiplie la seconde par un facteur θ, fonction de t, et qu'on l'ajoute ensuite à la première, il viendra

$$[(M+M'\theta)u+(N+N'\theta)x]dt+(P+P'\theta)du+(Q+Q'\theta dx)$$
$$=(T+T'\theta)dt,$$

résultat qui rentreroit dans l'équation du premier degré et du premier ordre, à deux variables seulement, si l'on avoit

$$du+\frac{Q+Q'\theta}{P+P'\theta}dx=d\left[u+\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}x\right],$$

puisqu'en faisant

$$u+\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}x=z,$$

on trouveroit

$$(M+M'\theta)z\,dt+(P+P'\theta)\,dz=(T+T'\theta)\,dt,$$

équation du premier degré et du premier ordre entre les variables z et t.

Pour que la condition exigée soit remplie, il faut en général que

$$\frac{Q+Q'\theta}{P+P'\theta}=\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}, \qquad \text{d.}\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}=0:$$

chassant θ de la seconde équation, on en déduira une relation entre les coefficiens $M, N, P, Q, M', N', P', Q'$.

Lorsque ces coefficiens seront constans, elle sera satisfaite immédiatement en supposant θ constant, et ce facteur sera déterminé par la première équation, qui ne monte qu'au second degré. Si on désigne par θ_1 et θ_2, les valeurs de θ; par m_1 et m_2, celles de $\frac{M+M'\theta}{P+P'\theta}$; par n_1, n_2, celles de $\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}$; enfin, par T_1, T_2, celles de $\frac{T+T'\theta}{P+P'\theta}$, on trouvera (257) ces deux équations primitives

$$u+n_1x=e^{-m_1t}\left(\int e^{m_1t}T_1dt+C_1\right)$$

$$u+n_2x=e^{-m_2t}\left(\int e^{m_2t}T_2dt+C_2\right),$$

desquelles on tirera les expressions générales de u et de x,

2°. Soient les équations

$$(Mu+Nx+Py)dt+Q\,du+R\,dx+S\,dy=T\,dt$$
$$(M'u+N'x+P'y)dt+Q'du+R'dx+S'dy=T'dt,$$
$$(M''u+N''x+P''y)dt+Q''du+R''dx+S''dy=T''dt;$$

on multipliera la deuxième par θ, la troisième par θ'; on

les ajoutera ensuite avec la première ; ce qui donnera

$$[(M+M'\theta+M''\theta')u+(N+N'\theta+N''\theta')x+(P+P'\theta+P''\theta')y]dt$$
$$+(Q+Q'\theta+Q''\theta')du+(R+R'\theta+R''\theta')dx+(S+S'\theta+S''\theta')dy$$
$$=(T+T'\theta+T''\theta')dt.$$

Pour ramener ce résultat à la forme d'une équation du premier degré et du premier ordre à deux variables, on fera

$$du+\frac{R+R'\theta+R''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}dx+\frac{S+S'\theta+S''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}dy=$$
$$d\left[u+\frac{N+N'\theta+N''\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'}x+\frac{P+P'\theta+P''\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'}y\right],$$

d'où il suit

$$\frac{R+R'\theta+R''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}=\frac{N+N'\theta+N''\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'},$$
$$d.\frac{N+N'\theta+N''\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'}=0,$$
$$\frac{S+S'\theta+S''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}=\frac{P+P'\theta+P''\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'},$$
$$d.\frac{P+P'\theta+P'\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'}=0.$$

La deuxième et la quatrième équations auront lieu d'elles-mêmes en prenant θ et θ' constans, si les coefficiens du premier membre des équations proposées sont constans aussi : les facteurs θ et θ' seront déterminés alors par la première et la troisième équation. Le résultat final en θ ou en θ' ne montera qu'au troisième degré ; on peut le simplifier, en observant que les équations proposées ont chacune un coefficient arbitraire et faisant

$$Q+Q\theta+Q''\theta'=1 ;$$

puis posant

$$R+R'\theta+R''\theta'=\alpha, \qquad S+S'\theta+S''\theta'=\beta,$$

on trouvera pour

$M+M'\theta+M''\theta'$, $N+N'\theta+N''\theta'$ $P+P'\theta+P''\theta'$,

des expressions de la forme

$A+A'\alpha+A''\beta$, $B+B'\alpha+B''\beta$, $C+C'\alpha+C''\beta$,

et il viendra, entre α et β, les équations

$$\alpha=\frac{B+B'\alpha+B''\beta}{A+A'\alpha+A''\beta}, \qquad \beta=\frac{C+C'\alpha+C''\beta}{A+A'\alpha+A''\beta},$$

qui conduiront évidemment à une équation finale du troisième degré. Considérant donc chacune des racines de cette équation en particulier, on obtiendra trois équations primitives de la forme

$$u+n_1x+p_1y=e^{-m_1t}\left(\int e^{m_1t}T_1\,dt+C_1\right)$$
$$u+n_2x+p_2y=e^{-m_2t}\left(\int e^{m_2t}T_2\,dt+C_2\right)$$
$$u+n_3x+p_3y=e^{-m_3t}\left(\int e^{m_3t}T_3\,dt+C_3\right)(*).$$

306. D'Alembert applique aux équations du premier degré d'un ordre quelconque ce procédé, qu'on étend

---

(*) On parviendra directement à ce résultat, en transformant par l'élimination les équations proposées en trois autres, qui contiennent séparément les différentielles dx, dx et dy, et qui soient par conséquent de la forme

$$du+(A\,u+B\,x+C\,y)\,dt=\tau\,dt$$
$$dx+(A'u+B'x+C'y)\,dt=\tau'dt$$
$$dy+(A''u+B''x+C''y)\,dt=\tau''dt;$$

on pourroit changer de même les équations du n°. précédent en

$$dx+(Au+Bx)\,dt=\tau\,dt$$
$$dx+(A'u+B'x)\,dt=\tau'dt;$$

c'est ainsi que d'Alembert présente ces équations.

sans peine à un nombre quelconque d'équations du premier degré et du premier ordre ; et pour cela il ramène les premières aux secondes. Ayant par exemple deux équations de la forme

$$M u + N x + P \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Q \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + R \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + S \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = T$$

$$M' u + N' x + P' \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Q' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + R' \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + S' \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = T',$$

il fait $\mathrm{d}u = p\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x = q\,\mathrm{d}t$, et il a par conséquent entre les cinq variables t, u, x, p et q, les quatre équations du premier ordre,

$$(Mu + Nx + Pp + Qq)\,\mathrm{d}t + R\,\mathrm{d}p + S\,\mathrm{d}q = T\,\mathrm{d}t$$

$$(M'u + N'x + P'p + Q'q)\,\mathrm{d}t + R'\mathrm{d}p + S'\mathrm{d}q = T'\,\mathrm{d}t$$

$$p\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}u = 0 \qquad q\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x = 0,$$

qu'il traite alors par la méthode du n°. précédent.

Cet artifice d'analyse s'applique également aux équations du premier degré de tous les ordres, quel que soit leur nombre.

De l'intégration des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

Recherche d'une fonction de plusieurs variables, lorsque tous ses coefficiens différentiels d'un même ordre sont donnés explicitement ou implicitement.

307. Les fonctions qui dépendent de deux ou d'un plus grand nombre de variables, diffèrent de celles d'une seule en ce qu'elles ont pour chaque ordre plusieurs coefficiens différentiels. Si z, par exemple, est une fonction de deux variables, il aura, pour le premier ordre, deux coefficiens différentiels, savoir : $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$;

l'un pris en faisant varier x seul, et l'autre en faisant varier y seul : dans le second ordre le nombre de coefficiens différentiels s'élève à trois, et s'accroît ainsi successivement d'ordre en ordre (124). Pour remonter des coefficiens différentiels d'une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables, à cette fonction, il se présente plusieurs cas : 1°. on peut avoir tous ses coefficiens différentiels d'un même ordre exprimés par les variables indépendantes ; 2°. la fonction elle-même peut entrer avec les variables indépendantes, dans les expressions des coefficiens différentiels ; 3°. enfin, on peut n'avoir qu'une relation entre ces coefficiens, la fonction dont ils dérivent et les variables indépendantes. Nous nous occuperons d'abord des deux premiers cas qui sont les plus simples.

308. Lorsque les coefficiens différentiels du premier ordre d'une fonction à deux variables sont connus, on en déduit sa différentielle première, *et vice versâ* : si $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, on aura $dz=pdx+qdy$. Pour obtenir z, il faudra intégrer la différentielle $pdx+qdy$ par le procédé que nous avons appliqué, n°. 261, à la différentielle $Mdx+Ndy$, ce qui ne se pourra à moins que les fonctions données p et q ne satisfassent à l'équation de condition $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$. Quand cette circonstance n'aura pas lieu, on en pourra conclure que l'expression $pdx+qdy$ n'est la différentielle d'aucune fonction de deux variables, et ne signifiera rien du tout, tant qu'on y regardera en même temps les deux variables x et y comme indépendantes.

309. Occupons-nous encore des fonctions de trois variables.

Soit $dz=n\,du+p\,dx+q\,dy$, c'est-à-dire que

$$\frac{dz}{du}=n,\quad \frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dy}=q,$$

n, p et q, étant des fonctions de u, x et y. Il existera entre ces fonctions des relations analogues à celles qu'on a fait remarquer plus haut pour la différentielle $dz=p\,dx+q\,dy$? En effet, si on suppose successivement dy, dx et du, nuls, c'est-à-dire, si l'on regarde alternativement y, x et u, comme constans, la différentielle proposée doit présenter trois différentielles complètes entre deux variables, savoir :

$dz=n\,du+p\,dx$, $dz=n\,du+q\,dy$, $dz=p\,dx+q\,dy$,

desquelles il résultera nécessairement

$$\frac{dn}{dx}=\frac{dp}{du},\quad \frac{dn}{dy}=\frac{dq}{du},\quad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}.$$

L'intégration s'effectue ensuite en n'ayant d'abord égard qu'à une seule des variables, comme si les deux autres étoient constantes. Faisons $\int n\,du=U+V$, V désignant une fonction dans laquelle u n'entre pas. Si n contient en même temps u, x et y, on aura en différentiant

$$dz=\frac{dU}{du}du+\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy,$$

ou

$$dz=n\,du+\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dx}\right)dx+\left(\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dy}\right)dy,$$

puisque $\frac{dU}{du}du=n\,du$. Si on retranche cette valeur

de

de dz de la proposée, il viendra

$$\left(p-\frac{dU}{dx}-\frac{dV}{dx}\right)dx+\left(q-\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dy}\right)dy=0;$$

et comme les deux variables x et y sont indépendantes l'une de l'autre, il faudra qu'on ait séparément les équations

$$p-\frac{dU}{dx}-\frac{dV}{dx}=0, \qquad q-\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dy}=0,$$

desquelles on tirera

$$\frac{dV}{dx}=p-\frac{dU}{dx}, \qquad \frac{dV}{dy}=q-\frac{dU}{dy}.$$

Or $\frac{dU}{dx}$ et $\frac{dU}{dy}$ sont des fonctions connues; on aura donc V en intégrant, par rapport aux deux variables x et y, la différentielle

$$\left(p-\frac{dU}{dx}\right)dx+\left(q-\frac{dU}{dy}\right)dy,$$

au moyen du procédé du n°. 261, procédé qui suppose que l'équation de condition

$$\frac{dp}{dy}-\frac{d^2U}{dx\,dy}=\frac{dq}{dy}-\frac{d^2U}{dy\,dx}$$

soit satisfaite. Cette équation se réduira à

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}, \text{ à cause de } \frac{d^2U}{dx\,dy}=\frac{d^2U}{dy\,dx} \text{ (122)};$$

de plus, il convient d'observer que V ne devant pas contenir u, on doit avoir

$$\frac{dV}{dx\,du}=0, \qquad \frac{dV}{dy\,du}=0,$$

ce qui donne

$$\frac{dp}{du}=\frac{d^2U}{dx\,du}, \qquad \frac{dq}{du}=\frac{d^2U}{dy\,du};$$

et par conséquent

$$\frac{dp}{du}=\frac{dn}{dx}, \qquad \frac{dp}{du}=\frac{dn}{dy},$$

puisque

$$\frac{d^2U}{dx\,du}=\frac{d.\frac{dU}{du}}{dx}, \qquad \frac{d^2U}{dy\,du}=\frac{d.\frac{dU}{du}}{dy}$$

et $\frac{dU}{du}=n$.

Les équations

$$\frac{dn}{dx}=\frac{dp}{du}, \qquad \frac{dn}{dy}=\frac{dq}{du}, \qquad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},$$

se retrouvant par l'intégration, expriment donc les seules conditions qui doivent être satisfaites pour que l'expression $dz=n\,du+p\,dx+q\,dy$ soit la différentielle d'une fonction des trois variables u, x et y.

Nous ne poursuivrons pas plus loin ce sujet; ce qui précède suffit pour montrer comment on doit opérer sur une différentielle du premier ordre, renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes; et il est facile d'en déduire le procédé qui conduiroit aux différentielles des ordres supérieurs, dans lesquelles on doit regarder d^2u, d^2x, d^2y, etc. comme de nouvelles variables.

310. Passons au cas où la fonction cherchée entre dans l'expression de ses coefficiens différentiels, qui, de cette manière, sont tous donnés implicitement. Supposons premièrement que la fonction cherchée z ne dépende que des deux variables x et y; nous aurons encore $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$; p et q contenant en même temps x, y et z: et de là nous déduirons l'équation différentielle $dz=p\,dx+q\,dy$, à laquelle on rappor-

tera l'équation quelconque

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

en faisant $-\frac{P}{R} = p$, $-\frac{Q}{R} = q$.

Pour que p et q soient les coefficiens différentiels d'une fonction de deux variables, il faut toujours que $\frac{d(p)}{dy} = \frac{d(q)}{dx}$. On a employé ici la notation du n°. 126 pour marquer qu'il faut faire varier dans p et dans q, en même temps que x et y, la fonction z qui contient implicitement ces variables; en opérant ainsi, et mettant p et q au lieu de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$, on trouvera

$$\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz},$$

ou

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dz} - p\frac{dq}{dz} = 0 \ldots\ldots\ldots (A).$$

Si l'on substitue $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$ à la place de p et de q, il viendra, après les réductions,

$$P\frac{dR}{dy} - R\frac{dP}{dy} + R\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dR}{dx} + Q\frac{dP}{dz} - P\frac{dQ}{dz} = 0 \ldots (B),$$

équation qui exprime la relation qui doit exister entre P, Q et R, pour que dans l'équation différentielle

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

z puisse être regardé comme une fonction des deux variables x et y, et que l'intégrale de cette équation soit par conséquent exprimée par une seule équation primitive entre les trois variables x, y et z. Il suit de là que dans une équation différentielle à trois variables, prise au hasard, on ne peut pas supposer que l'une des variables soit fonction des deux autres.

Pendant long-temps on appeloit *équations absurdes*; et on regardoit comme insignifiantes, celles qui ne satisfaisoient pas à l'équation (B); mais Monge a fait voir que toutes les équations différentielles à trois variables avoient une signification réelle; et que tandis que celles dont l'intégrale étoit exprimée par une seule équation entre trois variables appartenoient à des surfaces courbes, chacune des autres représentoit une infinité de courbes à double courbure, jouissant d'une propriété commune. Nous ne nous occuperons pour le moment que des premières; mais dans la suite nous reviendrons sur les dernières.

311. Lorsque l'équation (B) devient identique par la substitution des valeurs de P, Q et R, il n'en résulte pas toujours que l'équation

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0,$$

soit une différentielle exacte; mais du moins, on peut la rendre telle en la multipliant par un facteur. En effet, soit μ ce facteur, et supposons que

$$\mu P\,dx+\mu Q\,dy+\mu R\,dz$$

soit une différentielle exacte, on aura (309)

$$\frac{d.\mu R}{dy}=\frac{d.\mu Q}{dz},\quad \frac{d.\mu R}{dx}=\frac{d.\mu P}{dz},\quad \frac{d.\mu Q}{dx}=\frac{d.\mu P}{dy}.$$

Ces équations étant développées deviendront

$$\left.\begin{aligned}\mu\left(\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\right)+R\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{dz}&=0\\ \left(\frac{dR}{dy}-\frac{dP}{dz}\right)+R\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{dz}&=0\\ \mu\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)+Q\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{dy}&=0\end{aligned}\right\}\ (C);$$

on éliminera μ, en multipliant la première par P, la

seconde par $-Q$, la troisième par R, et en ajoutant les produits : leur somme sera divisible par μ, et donnera

$$P\frac{dR}{dy}-P\frac{dQ}{dz}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}+R\frac{dQ}{dx}-R\frac{dP}{dy}=0,$$

équation qui est la même que (B), et lorsqu'elle sera satisfaite, la détermination de μ ne dépendra que de deux quelconques des trois équations (C).

312. Lorsque les différentielles dx, dy et dz, montent au delà du premier degré dans l'équation proposée, elle ne peut s'intégrer par ce qui précède, que quand elle satisfait à une nouvelle condition que nous allons faire connoître. Prenons pour exemple l'équation

$$Pdx^2+Qdy^2+Rdz^2+2Sdxdy+2Tdxdz+2Vdydz=0;$$

elle ne sauroit résulter de la différentiation d'une équation primitive entre les variables x, y et z, à moins qu'elle ne puisse se ramener à la forme $P'dx+Q'dy+R'dz=0$. En effet, quelle que soit l'intégrale, on peut toujours en déduire, par la différentiation, $dz=pdx+qdy$, p et q désignant des fonctions quelconques de x, y et z; il faut donc qu'en résolvant la proposée par rapport à dz, les différentielles dx et dy sortent toutes deux du radical; or, c'est ce qui n'arrive pas toujours; car on a

$$dz=\frac{1}{R}\{-Tdx-Vdy$$

$$\pm\sqrt{(T^2-PR)dx^2+2(TV-RS)dxdy+(V^2-QR)dy^2}\};$$

et si la quantité, qui est sous le radical, n'est pas un quarrré parfait, ou du moins si l'on n'a pas

$$(TV-RS)^2=(T^2-PR)(V^2-QR),$$

les différentielles dx et dy resteront engagées sous ce radical. En général, quel que soit le degré de l'équation

proposée, par rapport à dz, dx, dy, il faut qu'étant ordonnée suivant les puissances de dz, elle puisse se décomposer en facteurs de la forme

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.

313. Nous allons passer au troisième cas de la recherche des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables. Dans ce cas, on n'a pour déterminer la fonction inconnue que quelques-uns de ses coefficiens différentiels d'un certain ordre, ou une seule équation entr'eux. Il constitue ce que l'on appelle *le Calcul intégral aux différences partielles*, et qu'on devroit nommer, d'après les remarques du n°. 124, *Calcul intégral des différentielles partielles*; car les coefficiens différentiels, considérés isolément, ne font connoître que les différentielles partielles, et non pas les différences qui sont l'objet d'un calcul à part, qu'on trouvera dans le traité des séries qui termine cet ouvrage. Le coefficient $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}$, étant multiplié par $dx^m dy^n$, devient $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n} dx^m dy^n$, et exprime alors la différentielle $m^{\text{ème}}$, par rapport à x, de la différentielle $n^{\text{ème}}$ de z, par rapport à y, *et vice versâ*.

314. La plus simple des équations différentielles partielles, est celle qui ne renferme que l'un des coefficiens du premier ordre et les variables indépendantes. Soit, par exemple, $\frac{dz}{dx} = R$, R ne contenant point z; en multi-

pliant par dx, on obtiendra $\frac{dz}{dx}dx=Rdx$, ou $dz=Rdx$, et en intégrant par rapport à x seulement, il viendra

$$z=\int R\,dx+C.$$

Dans ce résultat, C n'indique pas une simple constante arbitraire, mais une fonction absolument indéterminée, de toutes les variables autres que x, que pourroit contenir la fonction z. Si, par exemple, z dépendoit en même temps de x et de y, on auroit $z=\int R dx+\varphi(y)$, en désignant par φ une fonction arbitraire composée d'une manière quelconque de la variable y mêlée avec des constantes. Quand z sera une fonction de trois variables u, x et y, on aura alors $z=\int R\,dx+\varphi(u,y)$, et $\varphi(u,y)$ représentera une fonction arbitraire dans laquelle les variables u et y pourront être combinées d'une manière quelconque, soit entr'elles, soit avec des constantes. En général pour un nombre quelconque de variables indépendantes s, t, u, x, y, etc. l'intégrale de $\frac{dz}{dx}=R$, sera $z=\int R\,dx+\varphi(s,t,u,y,\text{etc.})$, parce qu'il est évident que la fonction $\varphi,(s,t,u,y,\text{etc.})$, quelle qu'elle soit, ne variant point quand x varie, on a toujours $\frac{dz}{dx}=R$.

Nous venons de supposer que z n'entre pas dans R; s'il s'y trouvoit, il faudroit intégrer, par quelques-unes des méthodes précédentes, en ne regardant comme variables que x et z seulement, l'équation

$$\frac{dz}{dx}dx-R\,dx=0;$$

et désignant son intégrale par $V=const.$ on auroit

$$V=\varphi(s,t,u,y,\text{etc.})$$

pour l'équation primitive de laquelle dépend la fonction z. En effet, si on différentie cette équation en ne faisant varier que x et z, le résultat sera de la forme

$$P\,dz + Q\,dx = 0,$$

et tel que $-\frac{Q}{P} = R$, ce qui donne $\frac{dz}{dx} = R$.

315. Considérons à présent l'équation $Pp + Qq = R$, dans laquelle P, Q, R, contiennent à-la-fois x, y et z, et par conséquent la plus générale qu'il soit possible d'avoir entre les coefficiens du premier ordre p et q, lorsqu'ils ne passent pas le premier degré. Prenant la valeur de p dans cette équation pour la substituer dans

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

nous trouverons

$$P\,dz - R\,dx = q(P\,dy - Q\,dx),$$

le coefficient q restant toujours indéterminé. Il se présente ici deux cas : 1°. la composition de P, Q et R, peut être telle que la fonction $P\,dz - R\,dx$ ne renferme que les variables z et x dont elle contient les différentielles, tandis que la fonction $P\,dy - Q\,dx$ ne renferme que x, y; 2°. l'une ou l'autre de ces fonctions, ou même toutes deux, peuvent renfermer les trois variables x, y et z.

Dans le premier cas, il existe un facteur μ, qui rend $P\,dy - Q\,dx$ différentielle exacte, et un facteur μ' qui opère la même chose sur $P\,dz - R\,dx$; désignant ces différentielles exactes par U et V, on aura

$$P\,dy - Q\,dx = \frac{1}{\mu}\,dU, \qquad P\,dz - R\,dx = \frac{1}{\mu'}\,dV,$$

et l'équation ci-dessus deviendra $dV = \frac{q\mu'}{\mu}\,dU$. Elle ne

peut être intégrable à moins que $\frac{q\mu'}{\mu}$ ne soit une fonction quelconque de U; posant donc $\frac{q\mu'}{\mu} = \varphi'(U)$, on a $dV = \varphi'(U)\,dU$, et en intégrant, il vient $U = \phi(V)$, résultat dans lequel ϕ désigne toujours une fonction arbitraire.

Pour donner un exemple de ce cas, proposons-nous d'intégrer l'équation $px + qy = nz$; nous aurons

$$P = x,\ Q = y,\ R = nz$$
$$P\,dy - Q\,dx = x\,dy - y\,dx,$$
$$P\,dz - R\,dx = x\,dz - nz\,dx.$$

On trouve par l'intégration des équations

$$x\,dy - y\,dx = 0,\ x\,dz - nz\,dx = 0,$$

que les facteurs μ et μ' sont respectivement $\frac{1}{x^n}$, $\frac{1}{x^{n+1}}$, et que par conséquent $U = \frac{y}{x}$, $V = \frac{z}{x^n}$; il s'ensuit donc $\frac{z}{x^n} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ou $x = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, c'est-à-dire, que z est une fonction homogène en x et y, du degré n. En effet, l'équation $px + qy = nz$, n'est autre chose que le théorême des fonctions homogènes donné n°. 266, et dont ce qui précède fournit encore une démonstration pour le cas de deux variables.

316. Quand les variables x, y et z, sont mêlées indistinctement dans les fonctions $Pdy - Qdx$, $Pdz - Rdx$, il n'est plus possible de les rendre intégrables, chacune en particulier, par le moyen des facteurs, et cela, parce qu'on ne sauroit intégrer isolément les équations

$$P\,dy - Q\,dx = 0,\quad P\,dz - R\,dx = 0;$$

car il faut bien remarquer que z ne doit pas être supposé

constant dans la première, ni x dans la seconde. Lagrange a fait voir le premier que néanmoins si l'on intégroit conjointement ces équations, et qu'on en déduisît deux équations primitives, renfermant chacune une constante arbitraire, de manière qu'on eût $U=a$, $V=b$, U et V étant des fonctions données en x, y et z, l'intégrale de la proposée $Pp+Qq=R$, seroit $V=\varphi(U)$, φ désignant toujours une fonction arbitraire. Cette proposition importante paroît démontrée assez simplement de la manière suivante.

Puisque les équations $U=a$, $V=b$, sont supposées déduites des équations $P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=0$, $P\mathrm{d}z-R\mathrm{d}x=0$, il faut que leurs différentielles ayent lieu en même temps que ces dernières, c'est-à-dire, que si l'on met dans les équations

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=0,$$

les valeurs de $\mathrm{d}y$ et de $\mathrm{d}z$, tirées de $P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=0$, $P\mathrm{d}z-R\mathrm{d}x=0$, on parvienne à des résultats identiquement nuls. Ces résultats sont

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}P+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}Q+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}R=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}P+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}Q+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}R=0;$$

on en tire

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\frac{Q}{P}-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\frac{R}{P},$$
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\frac{Q}{P}-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\frac{R}{P};$$

mais l'équation $V=\varphi(U)$ donne $dV=\varphi'(U)\,dU$, ou, en développant,

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz=\varphi'(U)\left[\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dz}dz\right];$$

substituant dans cette équation les valeurs précédentes de $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dV}{dx}$, on trouvera

$$\frac{dV}{dy}(P\,dy-Q\,dx)+\frac{dV}{dz}(P\,dz-R\,dx)$$
$$=\varphi'(U)\left[\frac{dU}{dy}(P\,dy-Q\,dx)+\frac{dU}{dz}(P\,dz-R\,dx)\right],$$

d'où l'on déduira

$$P\,dz-R\,dx=-\frac{\frac{dV}{dy}-\varphi'(U)\frac{dU}{dy}}{\frac{dV}{dz}-\varphi'(U)\frac{dU}{dz}}(P\,dy-Q\,dx),$$

équation qui rentre dans $P\,dz-R\,dx=q(P\,dy-Q\,dx)$, puisque q et $\varphi'(U)$ sont des fonctions indéterminées, et que par conséquent on peut supposer que

$$-\frac{\frac{dV}{dy}-\varphi'(U)\frac{dU}{dy}}{\frac{dV}{dz}-\varphi'(U)\frac{dU}{dz}}=q.$$

Quand on fait $\varphi(U)=a$, l'intégrale $V=\varphi(U)$ se réduit à $V=b$, ce qui nous apprend que $V=b$ est une intégrale particulière de la proposée. Il en seroit de même de $U=a$, car de $V=\varphi(U)$, on tire $U=\varphi_1(V)$, φ_1 étant une fonction inverse de φ, arbitraire par conséquent, et qu'on peut supposer égale à a; et il faut observer que, tirer des équations

$$P\,dy-Q\,dx=0,\quad P\,dz-R\,dx=0,$$

deux équations primitives de la forme $U=a$, $V=b$, c'est la même chose que de les intégrer.

317. On facilite beaucoup, dans un grand nombre de cas l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, à trois variables, en les partageant en deux autres par l'introduction d'une quantité indéterminée, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant :

1°. Soit l'équation $f(p, x)=F(q, y)$; si on fait $f(p, x)=\omega$, on aura en même temps $F(q, y)=\omega$, et on déduira de ces deux équations

$$p=f_{,}(\omega, x), \qquad q=F_{,}(\omega, y),$$

$f_{,}$ et $F_{,}$ étant des fonctions inverses de celles que désignent f et F. L'équation $dz=pdx+qdy$ deviendra

$$dz=dx\,f_{,}(\omega, x)+dy\,F_{,}(\omega, y);$$

si on représente par P et par Q les intégrales

$$\int dx f_{,}(\omega, x), \int dy F_{,}(\omega, y),$$

prises en n'ayant égard qu'aux variables x et y, on trouvera, en intégrant par parties,

$$z=P+Q-\int\left(\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega}\right)d\omega;$$

et il faudra, pour que la dernière intégration indiquée puisse s'effectuer, que $\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega}=\varphi'(\omega)$, d'où il s'ensuivra $\int\left(\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega}\right)d\omega=\varphi(\omega)$: on aura donc

$$z+\varphi(\omega)=(\omega)=P+Q, \quad \varphi'(\omega)=\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega}.$$

équations entre lesquelles il faudra éliminer ω lorsqu'on aura déterminé les fonctions arbitraires.

Il suffit souvent de substituer dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

la valeur de p ou de q, tirée immédiatement de la proposée, et d'intégrer ensuite le résultat par parties. Lorsqu'on a, par exemple, $p = f(q)$, il vient

$$dz = dx\,f(q) + q\,dy:$$

on trouve

$$z = x f(q) + qy - \int (x f'(q) + y)\,dq;$$

et comme l'intégration indiquée ne peut s'effectuer qu'en prenant $x f'(q) + y = \phi'(q)$, il en résulte

$$z + \phi(q) = x f(q) + qy, \quad \phi'(q) = x f'(q) + y.$$

Soit encore $p = yf(q, x) + F(q, x)$; on aura dans ce cas

$$dz = y\,dx\,f(q, x) + dx\,F(q, x) + q\,dy:$$

en intégrant d'abord par rapport à y, on trouvera

$$z = qy - \int [y\,dq - y\,dx\,f(q, x) - dx\,F(q, x)]$$
$$= qy - \int y\,[dq - dx\,f(q, x)] + \int dx\,F(q, x).$$

Si on fait $\mu\,[dq - dx\,f(q, x)] = dv$, μ étant le facteur propre à rendre le premier membre une différentielle exacte, et que l'on tire de l'intégrale une valeur de q en v et en x, on changera

$$\int dx\,F(q, x) \text{ en } \int dx\,F_1(v, x);$$

désignant par V ce que devient cette intégrale, lorsqu'elle est prise par rapport à x seul, on obtiendra

$$\int dx\,F_1(v, x) = V - \int \frac{dV}{dv}\,dv,$$

$$\text{et } z = qy + V - \int \left(\frac{y}{\mu} - \frac{dV}{dv}\right) dv,$$

d'où l'on déduira

$$\frac{y}{\mu} - \frac{dV}{dv} = \phi'(v),$$

et par conséquent

$$z + \phi(v) = qy + V, \qquad \phi'(v) = \frac{y}{\mu} - \frac{dV}{dv}$$

résultat dans lequel on doit remplacer q par sa valeur en v et en x. C'est à peu près ainsi qu'Euler, à qui on doit le Calcul intégral des différentielles partielles, traite les équations du premier ordre à trois variables.

De l'intégration des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au premier.

318. Lorsqu'on passe au second ordre, les coefficiens différentiels de cet ordre sont au nombre de trois pour une fonction de deux variables, et une équation différentielle partielle du même ordre peut exprimer en général une relation entre les variables indépendantes, la fonction cherchée, et ses coefficiens différentiels, tant du second ordre que du premier.

L'analogie fait voir que l'équation générale d'un ordre quelconque, et d'un nombre quelconque de variables, doit renfermer les variables indépendantes, la fonction cherchée, et ses coefficiens différentiels depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre dont elle est inclusivement. Avant de nous occuper de ce cas général, nous en ferons connoître quelques-uns qui s'abaissent à des ordres inférieurs à celui dont ils sont.

1°. Toute équation à trois variables qui sera de la forme

$$f\left\{x, y, \frac{d^n z}{dy^n}, \frac{d^{n+1} z}{dx dy^n}, \frac{d^{n+2} z}{dx^2 dy^n}, \cdots \frac{d^{n+m} z}{dx^m dy^n}\right\} = 0,$$

quoique de l'ordre $m+n$, se ramène sur le champ à une équation de l'ordre m, en faisant $\frac{d^n z}{d^n y} = v$, parce qu'elle se change en

$$f\left\{x, y, v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2 v}{dx^2}, \cdots \frac{d^m v}{dx^m}\right\} = 0.$$

On y doit supposer alors y constant, puisque tous les coefficiens différentiels de v qu'elle contient sont relatifs à x; et elle peut par conséquent se traiter par les méthodes propres aux équations qui ne contiennent que deux variables, savoir: x et v; mais il est évident que pour donner à l'expression de v toute la généralité dont elle est susceptible, il sera nécessaire de remplacer les m constantes arbitraires qu'elle doit renfermer, par autant de fonctions arbitraires de la variable y prise d'abord pour constante. Ayant obtenu v, on remontera à z, par le moyen de l'équation $\frac{d^n z}{dy^n} = v$, dans laquelle on doit maintenant regarder x comme constant, et qui, devenant par là une équation de l'ordre n entre deux variables seulement, pourra se traiter par la méthode du chapitre précédent, en observant néanmoins de changer en fonctions arbitraires de x, les n constantes arbitraires introduites par cette nouvelle intégration.

2°. Les équations de la forme

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^nz}{dx^n}\right) = 0,$$

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots\ldots \frac{d^nz}{dy^n}\right) = 0,$$

peuvent toujours être traitées immédiatement, comme s'il n'y entroit que deux variables, savoir: x et z dans la première, y et z dans la seconde; et après l'intégration, on substituera aux constantes, dans l'une des fonctions de y, et dans l'autre des fonctions de x.

Les équations du second ordre,

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dx} = Q, \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dy} = Q,$$

dans lesquelles P et Q ne contiennent que x et y,

se rapportent à la première forme. En faisant $\frac{dz}{dx}=v$, la première devient $\frac{dv}{dy}+Pv=Q$, équation du premier degré et du premier ordre, par rapport aux variables v et y, et dont l'intégrale est

$$v=e^{-\int P dy}\left(\int e^{\int P dy} Q dy+C\right) \text{ (257).}$$

Si l'on met pour v sa valeur $\frac{dz}{dx}$, et qu'on change C en $\phi(x)$, on aura

$$\frac{dz}{dx}=e^{-\int P dy}\left[\int e^{\int P dy} Q dy+\phi(x)\right];$$

en intégrant cette fois, par rapport à z et à x seuls, on trouvera

$$z=\int dx e^{-\int P dy}\left[\int e^{\int P dy} Q dy+\phi(x)\right]+\psi(y);$$

en traitant de même la seconde équation, on arriveroit à

$$z=\int dy e^{-\int P dx}\left[\int e^{\int P dx}\left[Q dx+\phi(y)\right]\right]+\psi(x).$$

Lorsqu'on aura $P=0$, les résultats ci-dessus se réduiront à

$$z=\int dx \int Q dy+\int dx \phi(x)+\psi(y),$$

dans un cas, et dans l'autre à

$$z=\int dy \int Q dx+\int dy \phi(y)+\psi(x);$$

mais comme la fonction ϕ est arbitraire, on écrira simplement

$$z=\int dx \int Q dy+\phi(x)+\psi(y),$$
$$z=\int dy \int Q dx+\phi(y)+\psi(x).$$

Nous observerons que ces deux cas ne dépendent que de l'intégration des fonctions d'une seule variable, et ont été traités sous ce point de vue, dans le n°. 247.

On a des exemples de la seconde forme générale dans les

les deux équations

$$\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}=Q, \quad \frac{d^2z}{dy^2}+P\frac{dz}{dy}=Q,$$

lorsqu'on suppose que P et Q renferment x, y et z. La première doit être traitée comme une équation du second ordre, entre les variables x et z; les constantes arbitraires dues à son intégration seront des fonctions de y: on opèrera de la même manière sur la deuxième, par rapport aux variables y et z, et on changera les constantes arbitraires en fonctions de x. Pour ne donner que le cas le plus simple, nous réduirons les équations proposées à

$$\frac{d^2z}{dx^2}=Q, \quad \frac{d^2z}{dy^2}=Q,$$

et nous supposerons que Q ne contienne que x et y; les formules du n°. 222 nous donneront immédiatement

$$z=\int dx\int Q dx+Cx+C', \quad z=\int dy\int Q dy+Cy+C',$$

d'où nous conclurons

$$z=\int dx\int Q dx+x\phi(y)+\psi(y), \quad z=\int dy\int Q dy+y\phi(x)+\psi(x).$$

319. Passons maintenant aux équations du secon ordre à trois variables, qui renferment tous les coefficiens différentiels de cet ordre, mais au premier degré seulement. Pour simplifier les calculs, nous ferons usage des dénominations suivantes

$$dz=p\,dx+q\,dy$$
$$dp=r\,dx+s\,dy \qquad dq=s\,dx+t\,dy$$
$$d^2z=dp\,dx+dq\,dy=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2$$

L'équation différentielle partielle du second ordre et à trois variables, considérée dans le cas général, ne peut donner que l'expression de l'un des coefficiens r, s, t, en fonction des deux autres et des quantités p, q, x, y, z; et en la combinant avec les équations $dp=r\,dx+s\,dy$, $dq=s\,dx+t\,dy$, on ne pourra éliminer que deux de ces coefficiens. Représentons la proposée par $Rr+Ss+Tt=V$, et supposons que les quantités R, S, T et V, renferment, d'une manière quelconque, x, y, z, p et q; substituons-y les valeurs de r et de t, tirées des équations

$$dp=r\,dx+s\,dy,\quad dq=s\,dx+t\,dy,$$

et qui sont

$$r=\frac{dp-s\,dy}{dx},\qquad t=\frac{dq-s\,dx}{dy};$$

nous trouverons

$$Rdpdy+Tdqdx-Vdxdy=s(Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2),$$

équation dans laquelle le coefficient s reste indéterminé, et qui seroit satisfaite indépendamment de ce coefficient, si l'on avoit en même temps

$$\begin{aligned} R\,dp\,dy+T\,dq\,dx-V\,dx\,dy&=0\\ R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dx^2&=0. \end{aligned}$$

En résolvant la dernière de ces équations par rapport à dy, on en déduira deux autres qui pourront être représentées par

$$dy-m'\,dx=0,\qquad dy-m''dx=0,$$

m' et m'' étant les racines de l'équation

$$Rm^2-Sm+T=0\ldots.(A).$$

Si l'on met successivement chacune des valeurs de dy

dans $R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = 0$, on aura les deux systêmes d'équations :

$$\left.\begin{aligned} dy - m'\,dx &= 0 \\ Rm'\,dp + T\,dq - Vm'\,dx &= 0 \end{aligned}\right\}(1),$$

$$\left.\begin{aligned} dy - m''\,dx &= 0 \\ Rm''\,dp + T\,dq - Vm''\,dx &= 0 \end{aligned}\right\}(2),$$

à chacun desquels il faudra joindre l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

qui exprime la relation qu'ont avec la fonction z, les coefficiens p et q ; et si on peut tirer de l'un quelconque de ces systêmes, deux équations primitives de la forme $M=a$, $N=b$, l'intégrale première de la proposée sera $N = \varphi(M)$, φ désignant une fonction arbitraire. Cette proposition est analogue à celle du n°. 316, et se prouve de la même manière.

Par les équations $M=a$, $N=b$, on a d'abord

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dp}dp + \frac{dM}{dq}dq = 0,$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dp}dp + \frac{dN}{dq}dq = 0;$$

mettant dans ces dernières, au lieu de dz, sa valeur tirée de $dz = p\,dx + q\,dy$, et celles de dy et de dq, tirées des équations (1), on trouvera

$$\left(\frac{dM}{dx} + m'\frac{dM}{dy} + (p+qm')\frac{dM}{dz} + \frac{Vm'}{T}\frac{dM}{dq}\right)dx + \left(\frac{dM}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dM}{dq}\right)dp = 0,$$

$$\left(\frac{dN}{dx} + m'\frac{dN}{dy} + (p+qm')\frac{dN}{dz} + \frac{Vm'}{T}\frac{dN}{dq}\right)dx + \left(\frac{dN}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dN}{dq}\right)dp = 0,$$

équations qui doivent être identiques, et qui se partagent par conséquent dans les suivantes :

$$\frac{dM}{dx}+m'\frac{dM}{dy}+(p+qm')\frac{dM}{dz}+\frac{Vm'}{T}\frac{dM}{dq}=0,$$
$$\frac{dM}{dp}-\frac{Rm'}{T}\frac{dM}{dq}=0,$$
$$\frac{dN}{dx}+m\frac{dN}{dy}+(p+qm')\frac{dN}{dz}+\frac{Vm'}{T}\frac{dN}{dq}=0,$$
$$\frac{dN}{dp}-\frac{Rm'}{T}\frac{dN}{dq}=0.$$

L'équation $N=\varphi(M)$ étant différentiée, donne

$$dN=\varphi'(M)dM,$$

ou

$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\frac{dN}{dp}dp+\frac{dN}{dq}dq=$$
$$\varphi'(M)\left\{\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\frac{dM}{dp}dp+\frac{dM}{dq}dq\right\};$$

si l'on substitue dans cette dernière les valeurs de

$$\frac{dM}{dx},\ \frac{dM}{dp},\ \frac{dN}{dx},\ \frac{dN}{dp},$$

prises dans les quatre précédentes, et qu'on change dz en $p\,dx+q\,dy$, on obtiendra

$$\left(\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}\right)(dy-m'dx)$$
$$+\frac{1}{T}\frac{dN}{dq}(Rm'dp+Tdq-Vm'dx)=$$
$$\varphi'(M)\left\{\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)(dy-m'dx)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{T}\frac{dM}{dq}(Rm'dp+Tdq-Vm'dx)\right\},$$

ce qui revient à

$$Rm'\mathrm{d}p+T\mathrm{d}q-Vm'\mathrm{d}x=\omega(\mathrm{d}y-m'\mathrm{d}x),$$

en faisant

$$\omega=-\frac{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y}+q\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z}-\phi'(M)\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}+q\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\right)}{\frac{1}{T}\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}q}-\phi'(M)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}q}\right)}.$$

Si l'on remet $r\mathrm{d}x+s\mathrm{d}y$ et $s\mathrm{d}x+t\mathrm{d}y$, pour $\mathrm{d}p$ et $\mathrm{d}q$, et que l'on égale à zéro ce qui multiplie chacune des différentielles indépendantes $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$, on obtiendra

$$Rm'r+Ts-Vm'=-\omega m',\quad Rm's+Tt=\omega,$$

d'où

$$Rm'r+Rm'^2s+Ts+Tm't-Vm'=0,\text{ en chassant }\omega;$$

enfin, l'équation (A) donnant $Rm'^2=Sm'-T$ réduit la précédente à $m'(Rr+Ss+Tt-V)=0$, et l'on rentre ainsi dans la proposée.

320. Le théorême que nous venons de démontrer, ainsi que ses analogues dans les ordres supérieurs, n'a pas la même généralité que celui du n°. 316; car il faut bien remarquer que les équations (1) peuvent renfermer à la fois les cinq variables x, y, z, p et q, et qu'en y joignant même l'équation $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$, on ne sauroit parvenir, par l'élimination, qu'à une résultante contenant trois variables, laquelle par conséquent ne pourroit dériver d'une seule équation primitive, que sous certaines conditions (310). On se tromperoit néanmoins si l'on concluoit de-là que quand les conditions dont on vient de parler ne sont pas remplies, l'équation différentielle partielle proposée ne peut elle-même dériver d'une seule équation primitive.

321. Soit pour exemple, l'équation

$$Ar+Bs+Ct=V,$$

dans laquelle A, B et C, sont constans, et V est une fonction de x et de y. L'équation (A) devient pour ce cas $Am^2-Bm+C=0$; ses racines m' et m'' sont constantes, et les deux systêmes d'équations (1) et (2) donnent par l'intégration

$$\left.\begin{aligned} y-m'x&=a\\ Am'p+Cq-m'\int V\,\mathrm{d}x&=b\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} y-m''x&=a'\\ Am''p+Cq-m''\int V\,\mathrm{d}x&=b'\end{aligned}\right\}:$$

l'intégrale $\int V\,\mathrm{d}x$ ne dépend que d'une seule variable, parce qu'on peut chasser y de V, au moyen de sa valeur prise dans la première équation de chaque systême. On aura donc en même-temps ces deux intégrales premières de la proposée,

$$Am'p+Cq-m'\int V\,\mathrm{d}x=\varphi(y-m'x),$$
$$Am''p+Cq-m''\int V\,\mathrm{d}x=\psi(y-m''x);$$

et en intégrant l'une quelconque de ces équations, on arrivera à l'intégrale seconde.

Prenons la première, par exemple; elle donne

$$p=-\frac{C}{Am'}q+\frac{1}{A}\int V\,\mathrm{d}x+\varphi(y-m'x).$$

On peut pour simplifier, mettre m'' au lieu de $\frac{C}{Am'}$, puisqu'en vertu de l'équation (A), $m'm''=\frac{C}{A}$; en substituant dans $\mathrm{d}z=p\,\mathrm{d}x+q\,\mathrm{d}y$, on trouvera

$$\mathrm{d}z-\frac{\mathrm{d}x}{A}\int V\,\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\,\varphi(y-m'x)=q(\mathrm{d}y-m''\,\mathrm{d}x):$$

les équations à intégrer (316) seront donc

$$dy - m''dx = 0, \qquad dz - \frac{dx}{A}\int V dx - dx\,\varphi(y - m'x) = 0.$$

On tire de l'une, $y - m''x = a'$, ce qui change l'autre en

$$dz - \frac{dx}{A}\int V dx - dx\,\phi[a' + (m'' - m')x] = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z - \frac{1}{A}\int dx \int V dx - \frac{1}{m'' - m'}\,\phi(a' + (m'' - m')x) = b',$$

et devient

$$z - \frac{1}{A}\int dx \int V dx - \varphi(y - m'x) = b',$$

lorsqu'on remet pour a' sa valeur, en observant que φ est une fonction arbitraire, dont les coefficiens différentiels sont arbitraires aussi, et dans laquelle on peut comprendre telle quantité constante qu'on voudra. Il faut aussi remarquer que pour obtenir $\int dx \int V dx$, on doit intégrer une première fois par rapport à x, en substituant au lieu de y sa valeur, tirée de l'équation $y - m'x = a$, comme il a été dit plus haut; mais lorsqu'on sera parvenu au résultat, on remettra au lieu de a sa valeur $y - m'x$, et avant d'effectuer la seconde intégration, on changera y en $a' + m''x$, ainsi que l'exige l'équation $y - m''x = a'$, trouvée en dernier lieu. En général, quand on aura plusieurs de ces intégrations successives à effectuer, on ne pourra jamais employer à leur simplification que les équations qui doivent avoir lieu en même-temps. Avec ces attentions, l'intégrale seconde de l'équation proposée, $Ar + Bs + C = V$, sera

$$z - \frac{1}{A}\int dx \int V dx = \varphi(y - m'x) + \psi(y - m''x).$$

Si l'on avoit $A=1$, $B=0$, $C=0$, et $V=-c^2$, ce qui changeroit l'équation proposée en

$$r-c^2t=0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dx^2}=c^2\frac{d^2z}{dy^2}(*),$$

l'intégrale deviendroit

$$z=\varphi(y-cx)+\psi(y+cx).$$

322. Les fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles, se déterminent, en supposant que la fonction z prenne des formes particulières, lorsqu'on assigne des relations entre les variables y et x. Voici deux exemples de cette détermination :

1°. Si l'on a $1=M\varphi(V)$, M et V désignant des fonctions données en x, y et z, et qu'on veuille déterminer la fonction représentée par la caractéristique φ, de manière qu'en posant $F(x,y,z)=0$, on ait en même-temps $f(x,y,z)=0$, les caractéristiques F et f désignant des fonctions connues, on fera $V=t$, et on combinera les trois équations

$$V=t, \quad F(x,y,z)=0, \quad f(x,y,z)=0,$$

pour en tirer des valeurs de x, y et z; en t; substituant ces valeurs dans M, qui deviendra une fonction de t, que je désigne par T, on aura

$$1=T\varphi(t) \text{ ou } \varphi(t)=\frac{1}{T},$$

et la fonction φ sera par conséquent déterminée, si

(*) Cette équation est celle des cordes vibrantes.

l'on remet dans cette dernière équation pour t et T, leur valeur en x, y et z.

2°. Soit $1 = M\varphi(V) + N\downarrow(V)$;

comme il y a deux fonctions à déterminer, il faut qu'il y ait deux conditions : on doit supposer que

$$F(x, y, z) = 0, \text{ donne } f(x, y, z) = 0;$$

que $F'(x, y, z) = 0$, donne $f'(x, y, z) = 0$.

Faisant toujours $V = t$, et tirant des trois équations

$$V = t, F(x, y, z) = 0, f(x, y, z) = 0,$$

les valeurs de x, y, z en t, on changera les quantités M, N, en fonctions de t. Soient T et θ ces fonctions, on aura

$$1 = T\varphi(t) + \theta\downarrow(t) \ldots . (1);$$

combinant ensuite les équations

$$V = t, F'(x, y, z) = 0, f'(x, y, z) = 0,$$

pour obtenir les valeurs de x, y, z en t, on changera par ces valeurs les quantités M et N en fonctions de t, que je désignerai par T' et θ', et il viendra

$$1 = T'\varphi(t) + \theta'\downarrow(t) \ldots (2).$$

Au moyen des équations (1) et (2) on déterminera les fonctions ϕ et ψ en t; puis on remettra à la place de t sa valeur V. (*).

(*) La détermination des fonctions arbitraires, revient à faire passer les surfaces qui représentent les équations proposées, par des courbes données; et ces courbes peuvent être continues ou discontinues, ainsi que les fonctions elles-mêmes.

Des équations différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité.

323. Nous avons fait voir dans le n°. 310, qu'une équation différentielle du premier ordre à trois variables, de la forme $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$, ne pouvoit être satisfaite par une fonction de deux variables, qu'autant que l'équation

$$P\frac{dR}{dy}-R\frac{dP}{dy}+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}-P\frac{dQ}{dz}=0$$

étoit identique par elle-même; mais en établissant une dépendance quelconque entre x, y, z, on la changera dans une autre qui ne contiendra plus que deux de ces variables, et déterminera par conséquent l'une de celles-ci en fonction de l'autre.

Si l'on avoit, par exemple, l'équation

$$\frac{dz}{z-c}=\frac{x\,dx+y\,dy}{x(x-a)+y(y-b)},$$

qui ne peut remplir la condition énoncée ci-dessus, tant que a et b ne sont pas nuls, et qu'on y fît $y=\varphi(x)$, φ désignant une fonction quelconque, elle se changeroit en

$$\frac{dz}{z-c}=\frac{[x+\varphi(x)\varphi'(x)]\,dx}{x(x-a)+\varphi(x)[\varphi(x)-b]}$$

et donneroit autant de relations différentes entre z et x, que l'on assigneroit de formes particulières à la fonction ϕ. Si l'on prend, par exemple, $\phi(x)=x$, on aura

$$\frac{dz}{z-c}=\frac{2x\,dx}{x(x-a)+x(x-b)}=\frac{2\,dx}{2x-a-b},$$

d'où on tirera $z-c=C(2x-a-b)$, C étant une constante arbitraire ; et la proposée sera satisfaite par le système des équations

$$\left.\begin{array}{l} y=x \\ z-c=C(2x-a-b) \end{array}\right\}.$$

Newton, dans son Traité des Fluxions (*), avoit déjà indiqué cette manière de résoudre les équations différentielles qui contenoient plus de deux variables; mais elle a l'inconvénient d'exiger une intégration pour chaque résultat qu'on veut obtenir, et Monge a remarqué, en 1784, qu'on pouvoit, par l'introduction d'une fonction arbitraire, parvenir à un système général d'équations qui en donnât une infinité de particuliers, satisfaisant tous à la proposée.

324. Le procédé que l'on doit suivre pour intégrer l'équation

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0,$$

par une seule équation primitive, lorsque la chose est possible, conduit aussi à la solution la plus générale que l'on puisse obtenir pour cette équation, dans le cas contraire. En effet, si on l'intègre d'abord, en regardant une des variables qu'elle renferme comme constante, z, par exemple, que l'on représente par $U=C$, l'équation primitive qui répond à $P\,dx+Q\,dy=0$, que l'on différentie cette équation primitive, en faisant varier à la fois x, y, z et C, et que l'on compare

(*) *Newtoni opuscula*, tome I, page 82, édition de 1744.

le résultat à la proposée, on arrivera à l'équation

$$\frac{dC}{dz} = \frac{dU}{dz} - \mu R,$$

μ étant le facteur qui rend $P\,dx + Q\,dy$ une différentielle exacte. A la vérité, le second membre ne se réduira plus à une fonction de z seul, comme cela arrive dans le cas où la condition d'intégrabilité est remplie, et ne pourra donner C, comme l'exige cette condition; mais il est évident qu'en supposant toujours que C soit une fonction de z, l'équation proposée sera satisfaite par l'équation primitive $U = C$, si l'on a en même-temps

$$\frac{dC}{dz} = \frac{dU}{dz} - \mu R:$$

faisant donc $C = \varphi(z)$, le système des équations

$$\left.\begin{aligned} U &= \varphi(z) \\ \frac{dU}{dz} - \mu R &= \varphi'(z) \end{aligned}\right\}$$

satisfera à la proposée, quelle que soit la forme de la fonction φ, et pourra se particulariser d'une infinité de manières en prenant φ arbitrairement.

Appliquons ceci à l'équation

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x(x-a) + y(y-b)},$$

que nous avons prise pour exemple dans le n°. précédent; nous aurons

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{x(x-a) + y(y-b)}, \qquad R = -\frac{1}{z-c},$$

et faisant

$$\mu = x(x-a) + y(y-b),$$

nous trouverons $U=x^2+y^2$: nous obtiendrons par conséquent les équations

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=\phi(z)\\ \frac{x(x-a)+y(y-b)}{z-c}&=\phi'(z)\end{aligned}\right\}.$$

De la méthode des Variations.

Recherche de la variation d'une fonction quelconque.

325. Lorsque l'état de la question a déterminé une dépendance entre plusieurs variables, la différentiation ordinaire suppose que cette dépendance demeure toujours la même dans le cours du calcul ; on conçoit que si l'une des variables doit être fonction des autres, la forme de cette fonction ne change point, et que par conséquent les accroissemens ou les décroissemens qu'elle éprouve sont, par sa nature ou par l'équation dont elle dépend, liés d'une manière invariable avec ceux que peuvent recevoir les quantités qui entrent dans sa composition. Divers problèmes de géométrie et de mécanique, proposés peu de temps après la découverte du calcul différentiel, ont bientôt fait sentir aux Analystes que ce point de vue n'étoit pas assez général, et qu'il y avoit des cas où il étoit nécessaire de supposer que la forme de la fonction variât elle-même ; c'est là ce qui a donné naissance au calcul dont nous allons nous occuper, et dont la découverte est le résultat des premiers travaux de Lagrange. On avoit bien avant lui résolu des questions du genre de celles qu'on atteint par ce calcul ; mais seulement par des procédés particuliers, qu'il falloit modifier selon les diverses circonstances que présentoient les applications qu'on avoit en vue.

Voici l'idée la plus générale que l'on puisse se former du calcul des variations :

Que les variables x et y, d'abord liées entr'elles par une équation ou par une dépendance quelconque, viennent à changer parce que la forme de cette équation, ou la relation qui résulte de la dépendance établie entr'elles, a cessé d'être la même; on ne sauroit exprimer cette circonstance d'une manière plus générale qu'en regardant les accroissemens de x et de y, comme absolument indépendans l'un de l'autre, parce qu'en effet, cette hypothèse, ne désignant aucune relation particulière entre x et y, les comprend toutes. Il suit de-là que le calcul des variations ne peut être employé que pour des expressions auxquelles on a déjà appliqué le calcul différentiel, et qu'il ne diffère de ce dernier que par l'indépendance qu'il suppose entre des variables qu'on avoit regardées auparavant comme liées entr'elles par des relations constantes. L'exemple suivant éclaircira ces notions.

L'expression $\frac{y\,dx}{dy}$, qui appartient à la soutangente d'une courbe, représente une fonction déterminée de x, quand on y considère y comme une fonction dont la composition en x est connue ; et si cette dernière vient à changer, la première change aussi. On éprouvera peut-être quelques difficultés à concevoir comment on a pu soumettre au calcul la variabilité d'une fonction qui n'est que la dépendance abstraite dans laquelle plusieurs quantités se trouvent les unes à l'égard des autres ; mais il est facile de les lever, en observant que la liaison entre les quantités y et x changera, si l'on fait varier la première, indépendamment de la seconde. Ainsi dans l'exemple actuel, si l'on suppose

que x demeurant le même, y et $\frac{dy}{dx}$ changent, la relation de y et de x, aura changé nécessairement, puisque ces quantités sont des conséquences immédiates de cette relation : on peut même ne faire varier que $\frac{dy}{dx}$, dans la formule $\frac{y\,dx}{dy}$, parce qu'elle ne dépend que d'une seule valeur de y; mais si l'on considéroit une expression qui fût affectée du signe $\int$, il faudroit faire varier en même temps y et $\frac{dy}{dx}$, car il suit de la théorie de la formation des intégrales, exposée dans le n°. 209, que la valeur d'une semblable fonction dépend des valeurs consécutives de y, lesquelles se déduisent de celles de $\frac{dy}{dx}$.

326. Il est évident que pour différentier sous ce point de vue quelque expression que ce soit, il suffit d'y faire varier y, dy, d^2y... etc. sans toucher à x; mais en traitant cette dernière variable comme la première, on parvient à des résultats plus généraux et plus symétriques que ceux qu'on obtiendroit autrement, et qui conduisent à des remarques très-intéressantes sur la nature des formules différentielles, c'est pourquoi nous en userons ainsi dans ce qui suit. Pour ne pas confondre les signes de la nouvelle espèce de différentiation, dans laquelle x et y sont regardés comme indépendans, avec ceux de la première, où l'on considéroit une de ces variables comme fonction de l'autre, nous employerons, ainsi que Lagrange, la caractéristique δ : nous supposerons avec lui, que quand y ne

change que par l'effet du changement de x, qui devient $x+\mathrm{d}x$, sa différentielle est $\mathrm{d}y$, mais que quand la relation de y et de x varie, ces deux quantités deviennent respectivement $x+\delta x$, $y+\delta y$; et nous désignerons sous le nom de *variations* les accroissemens δx et δy.

Il suit de-là que de même qu'on a

$$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y,$$

u étant une fonction de x et de y, on aura aussi

$$\delta u=\frac{\delta u}{\delta x}\delta x+\frac{\delta u}{\delta y}\delta y;$$

en appliquant ceci à l'exemple $\frac{y\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, il faudra regarder $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ comme fonction de x et de y, et il viendra d'après cela

$$\delta\,\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}x\delta y}{\mathrm{d}y}+y\delta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)$$

et $$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}y\delta\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\delta\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}\delta x-\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y^2},$$

car $\delta\mathrm{d}x=\mathrm{d}\delta x$, $\delta\mathrm{d}y=\mathrm{d}\delta y$. Cette dernière remarque est de la plus grande importance dans le Calcul qui va nous occuper, et voici comment on peut en établir la vérité.

Soit V, une quantité quelconque; on aura

$$\mathrm{d}V=V'-V,$$

V' étant la valeur consécutive de V, et en se bornant au premier terme du développement de V'; différentiant ensuite par rapport à la caractéristique δ, il viendra

$$\delta\,\mathrm{d}V=\delta V'-\delta V;$$

mais

mais pour obtenir $d\delta V$, il faudra changer de même δV en $\delta V'$, et prendre la différence des deux résultats : on trouvera donc ainsi $d\delta V = \delta V' - \delta V$, et par conséquent, $\delta dV = d\delta V$.

Il suit encore de-là, que $\delta d^2 V = d\delta dV = d^2 \delta V$. En continuant ainsi, on obtiendra ce théorême général :

$$\delta d^n V = d^m \delta d^{n-m} V = d^n \delta V,$$

et il est facile de voir qu'il rentre dans celui qu'on a démontré n°. 122 (*).

(*) Tout ce qui précède se peint ainsi qu'il suit, au moyen des considérations géométriques :

Lorsqu'on regarde y comme une fonction de x de forme constante, les diverses valeurs que peuvent prendre ces variables sont représentées par les ordonnées et les abscisses d'une même courbe CE, *fig.* 56 ; mais quand leur relation change, on passe de cette courbe à une autre quelconque $\gamma\varepsilon$, dont la nature dépend de la loi suivant laquelle ce changement a lieu. Nous avons déjà présenté de pareilles circonstances, en faisant varier les constantes qui entroient dans les équations des courbes ; mais alors nous ne considérions que des variations particulières, parce que nous regardions la forme de ces équations comme déterminée, tandis qu'ici nous supposons qu'elles soient quelconques. Dans ce dernier état de choses, la ligne $M\mu$, qui exprime le changement qu'éprouve l'ordonnée PM ou y, en passant de la courbe CE à la courbe $\gamma\varepsilon$, est absolument indéterminée. Si l'on prend un second point M', que l'on mène l'ordonnée $P'M'$, consécutive à PM, et que l'on tire MR, $\mu\rho$, parallèles à AP et $\mu m'$ parallèle à la courbe MM', on aura $m'\rho = M'R = dy$; et $m'\mu' = \mu'\rho - m'\rho$ sera le changement qu'éprouve dy dans le passage de la courbe CE à la courbe $\gamma\varepsilon$, ou δdy. Mais on peut aussi regarder cette ligne comme la différence entre $M\mu = \delta . PM = M'm'$ et $M'\mu' = \delta . P'M'$, elle deviendra ainsi $d\delta y$: on aura donc, comme ci-dessus, $\delta dy = d\delta y$. Ce n'est que pour ne pas compliquer la figure que nous avons fait varier AP ou x de la même quantité pour les deux courbes CE et $\gamma\varepsilon$. FIG. 56.

327. Pour ne pas nous arrêter à des exemples particuliers, supposons que u soit une fonction de

$$x, y, \frac{dy}{dx}=p, \frac{dp}{dx}=q, \text{ etc.}$$

on en trouvera la variation en différentiant à l'ordinaire, mais en se servant de la caractéristique δ au lieu de d; et la différentielle ordinaire étant

$$du=X\,dx+Y\,dy+P\,dp+Q\,dq+R\,dr+\text{etc.}$$

la variation sera

$$\delta u=X\delta x+Y\delta y+P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\text{etc.}$$

en observant que les quantités p, q, r, etc. doivent y être regardées comme renfermant deux variables indépendantes, x et y (n°. précéd.); et que par conséquent on peut prendre leur variation dans deux hypothèses différentes, savoir: en ne faisant varier qu'une de ces quantités, ou en les faisant varier toutes les deux. Nous opérerons sous ce dernier point de vue, parce que, comme nous l'avons déjà dit, il est plus général, et que d'ailleurs on en tire les résultats qui conviennent au premier, en supprimant les termes relatifs à celle des variables que l'on veut traiter comme constante; et à cause de

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{dy}{dx}\\ q&=\frac{dp}{dx}\\ r&=\frac{dq}{dx}\end{aligned}\right\}\text{nous aurons}\left\{\begin{aligned} \delta p&=\frac{dx\delta dy-dy\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta y-pd\delta x}{dx}\\ \delta q&=\frac{dx\delta dp-\delta p\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta p-qd\delta x}{dx}\\ \delta r&=\frac{dx\delta dq-dq\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta q-rd\delta x}{dx}\end{aligned}\right.$$

etc. etc.

A l'aide de ces formules on trouvera la variation d'une expression quelconque, renfermant x, y, et leurs différentielles, de quelque ordre que ce soit.

328. On peut aussi demander la variation d'une formule intégrale, telle que $\int U$, U renfermant x, y, dx, $d^2x \ldots dy$, $d^2y \ldots$; car les formules de ce genre, exprimant certaines fonctions dont la composition dépend de la relation établie entre les variables x et y, éprouveront des changemens si l'on fait varier cette relation, c'est-à-dire, si on regarde les variables x et y comme indépendantes l'une de l'autre dans les changemens qu'elles subissent. Il faudra donc appliquer à ce cas, les règles de différentiation que nous avons déjà employées pour la fonction u, et en observant que cette différentiation, n'ayant pas lieu dans la même acception où se trouve employé le signe $\int$ qui affecte la formule proposée, elle ne peut ni le détruire ni le modifier.

Nous allons donc établir ce théorême : $\delta \int U = \int \delta U$; en effet, $\delta \int U = \int U' - \int U$, U' étant ce que devient U lorsqu'on y met $x+\delta x$ et $y+\delta y$, au lieu de x et y ; et comme on a $\int U' - \int U = \int (U' - U)$, $U' - U = \delta U$, il s'ensuit $\delta \int U = \int \delta U$.

329. Cela posé, soit U une fonction de x, y, et de leurs différentielles ; on aura

$$dU = M dx + N d^2x + P d^3x + Q d^4x + \text{etc.} + m dy + n d^2y + p d^3y + q d^4y + \text{etc.}$$

et par conséquent,

$$\delta U = M \delta x + N \delta dx + P \delta d^2x + Q \delta d^3x + \text{etc.} + m \delta y + n \delta dy + p \delta d^2y + q \delta d^3y + \text{etc.}$$

d'où il suit :

$$\int \delta U = \int (M \delta x + N \delta dx + P \delta d^2x + Q \delta d^3x + \text{etc.}) + \int (m \delta y + n \delta dy + p \delta d^2y + q \delta d^3y + \text{etc.})$$

Cette expression n'est pas réduite à la forme la plus

simple qu'elle puisse avoir ; car si on intègre par parties, on aura :

$$\int M\delta x = \int M\delta x$$
$$\int N\delta \mathrm{d}x = \int N\mathrm{d}\delta x = N\delta x - \int \mathrm{d}N\delta x$$
$$\int P\delta \mathrm{d}^2 x = \int P\mathrm{d}^2\delta x = P\mathrm{d}\delta x - \int \mathrm{d}P\,\mathrm{d}\delta x = P\,\mathrm{d}\delta x - \mathrm{d}P\,\delta x + \int \mathrm{d}^2 P\delta x$$
$$\int Q\delta \mathrm{d}^3 x = \int Q\mathrm{d}^3\delta x = Q\mathrm{d}^2\delta x - \int \mathrm{d}Q\mathrm{d}^2\delta x = Q\mathrm{d}^2\delta x - \mathrm{d}Q\mathrm{d}\delta x + \int \mathrm{d}^2 Q\mathrm{d}\delta x$$
$$= Q\,\mathrm{d}^2\delta x - \mathrm{d}Q\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}^2 Q\delta x - \int \mathrm{d}^3 Q\delta x$$

etc. etc.

On aura pareillement,

$$\int m\delta y = \int m\delta y$$
$$\int n\delta \mathrm{d}y = \int n\,\mathrm{d}\delta y = n\delta y - \int \mathrm{d}n\,\delta y$$
$$\int p\delta \mathrm{d}^2 y = \int p\,\mathrm{d}^2\delta y = p\mathrm{d}\delta y - \mathrm{d}p\,\delta y + \int \mathrm{d}^2 p\delta y$$
$$\int q\delta \mathrm{d}^3 y = \int q\,\mathrm{d}^3\delta y = q\mathrm{d}^2\delta y - \mathrm{d}q\,\mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}^2 q\delta y - \int \mathrm{d}^3 q\delta y$$

etc.

et en substituant, il viendra

$$\int \delta U = (N - \mathrm{d}P + \mathrm{d}^2 Q - \text{etc.})\delta x + (P - \mathrm{d}Q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta x + (Q - \text{etc.})\mathrm{d}^2\delta x + \text{etc.}$$
$$+ (n - dp + \mathrm{d}^2 q - \text{etc.})\delta y + (p - \mathrm{d}\,q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta y + (q - \text{etc.})\mathrm{d}^2\delta y + \text{etc.}$$
$$+ \int (M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2 P - \mathrm{d}^3 Q + \text{etc.})\,\delta x$$
$$+ \int (m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2 p - \mathrm{d}^3 q + \text{etc.})\,\delta y$$

330. On remarquera, d'après cette formule, que si l'on avoit

$$M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2 P - \mathrm{d}^3 Q + \text{etc.} = 0$$
$$m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2 p - \mathrm{d}^3 q + \text{etc.} = 0$$

la variation $\int \delta U$ seroit entièrement délivrée du signe $\int$; mais ces équations sont précisément celles qui doivent avoir lieu pour que la fonction U soit intégrale par elle-même, et nous allons le prouver *à priori*, en appliquant à la recherche de ces conditions la méthode même des variations.

En effet, soit U, la différentielle d'une fonction $'U$; on aura $\mathrm{d}'U = U$, et par conséquent

$$\delta U = \delta \mathrm{d}'U, \text{ ou } = \mathrm{d}\,\delta'U,$$

d'où il suit que si U est une différentielle complète, δU en doit être pareillement une; et par conséquent lorsqu'on a fait sortir du signe $\int$, dans l'expression de $\int \delta U$, tous les termes qui peuvent s'intégrer, il faut que l'ensemble de ceux qui restent soit nul par lui-même, sans qu'on ait besoin de supposer pour cela aucune relation entre x, y, δx, et δy.

331. Ces remarques ne se bornent pas à l'expression de $\int U$: elles s'étendent également à celles de $\int\int U$, $\int\int\int U$, etc. quel que soit le nombre des signes d'intégration; et cherchant la variation de ces dernières formules, comme on a fait à l'égard de $\int U$, on trouvera les équations de condition, qui doivent avoir lieu pour que la quantité U soit la différentielle complète d'une fonction $'U$, d'un ordre immédiatement inférieur, d'une fonction $''U$ d'un ordre inférieur de deux unités, etc., et ainsi de suite. Soit, pour y arriver,

$$\left.\begin{array}{l} \delta U = M\delta x + N\mathrm{d}\,\delta x + P\mathrm{d}^2\delta x + Q\mathrm{d}^3\delta x + \text{etc.} \\ \quad + m\delta y + n\,\mathrm{d}\,\delta y + p\,\mathrm{d}^2\delta y + q\,\mathrm{d}^3\delta y + \text{etc.} \end{array}\right\};$$

on aura, par ce qui précède,

$$\begin{aligned} \delta\int U = {} & (N - \mathrm{d}P + \mathrm{d}^2Q - \text{etc.})\delta x + (P - \mathrm{d}Q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta x \\ & + (Q - \text{etc.})\mathrm{d}^2\delta x + \text{etc.} \\ & + (n - \mathrm{d}p + \mathrm{d}^2q - \text{etc.})\delta y + (p - \mathrm{d}q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta y \\ & + (q - \text{etc.})\mathrm{d}^2\delta y + \text{etc.} \\ & + \int (M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2P - \mathrm{d}^3Q + \text{etc.})\delta x \\ & + \int (m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2p - \mathrm{d}^3q + \text{etc.})\delta y; \end{aligned}$$

mais $\delta\int U = \delta' U$, et à cause que $'U = \mathrm{d}''U$, il viendra

$$\delta'' U = \delta\int U = \int \delta' U = \int \delta\int U:$$

on obtiendra donc $\delta^n U$ en intégrant de nouveau $\delta \int U$, et en faisant sortir de dessous le premier signe d'intégration, tout ce qu'il sera possible d'intégrer. On trouvera ainsi

$$\begin{aligned}\int \delta \int U = \delta^n U = \int (N - \mathrm{d}P + \mathrm{d}^2 Q - \text{etc.}) \delta x + \int (P - \mathrm{d}Q + \text{etc.}) \mathrm{d}\delta x \\ + \int (Q - \text{etc.}) \mathrm{d}^2 \delta x + \text{etc.} \\ + \int (n - \mathrm{d}p + \mathrm{d}^2 q - \text{etc.}) \delta y + \int (p - \mathrm{d}q + \text{etc.}) \mathrm{d}\delta y \\ + \int (q - \text{etc.}) \mathrm{d}^2 \delta y + \text{etc.} \\ + \int\int (M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2 P - \mathrm{d}^3 Q + \text{etc.}) \delta x \\ + \int\int (m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2 p - \mathrm{d}^3 q + \text{etc.}) \delta y\end{aligned}$$

et en intégrant par parties les termes susceptibles de l'être, c'est-à-dire, tous ceux qui, comme $\int P \mathrm{d} \delta x$, par exemple, contiennent des différentielles de δx et de δy, on aura

$$\begin{aligned}\int \delta \int U = \delta^n U = (P - \mathrm{d}Q + \mathrm{d}R - \text{etc.}) \delta x + (Q - \mathrm{d}R + \text{etc.}) \mathrm{d}\delta x \\ + (R - \text{etc.}) \mathrm{d}^2 \delta x + \text{etc.} \\ + (p - \mathrm{d}q + \mathrm{d}r - \text{etc.}) \delta y + (q - \mathrm{d}r + \text{etc.}) \mathrm{d}\delta y \\ + (r - \text{etc.}) \mathrm{d}^2 \delta y + \text{etc.} \\ + \int (N - 2\mathrm{d}P + 3\mathrm{d}^2 Q - 4\mathrm{d}^3 R + \text{etc.}) \delta x \\ + \int\int (M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2 P - \mathrm{d}^3 Q + \mathrm{d}^4 R - \text{etc.}) \delta x \\ + \int (n - 2\mathrm{d}p + 3\mathrm{d}^2 q - 4\mathrm{d}^3 r + \text{etc.}) \delta y \\ + \int\int (m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2 p - \mathrm{d}^3 q + \mathrm{d}^4 r - \text{etc.}) \delta y\end{aligned}$$

Telle est l'expression de la variation d'une formule qui dépend de deux intégrations successives ; il est évident qu'elle ne peut être délivrée des signes d'intégration, à moins qu'on n'ait

$$\begin{aligned} N - 2\,\mathrm{d}P + 3\,\mathrm{d}^2 Q - 4\mathrm{d}^3 R + \text{etc.} &= 0 \\ M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2 P - \mathrm{d}^3 Q + \mathrm{d}^4 R - \text{etc.} &= 0 \\ n - 2\mathrm{d}p + 3\,\mathrm{d}^2 q - 4\mathrm{d}^3 r + \text{etc.} &= 0 \\ m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2 p - \mathrm{d}^3 q + \mathrm{d}^4 r - \text{etc.} &= 0. \end{aligned}$$

Quand ces équations seront identiques, le résultat qui

sera $\delta^{n}U$, n'aura besoin que d'être intégré une fois, par rapport aux variations, pour donner ^{n}U, ou l'intégrale seconde de la proposée.

Soit pour exemple

$$U=x\,d^{2}y+2\,dx\,dy+y\,d^{2}x;$$

on aura

$$\delta U=d^{2}y\,\delta x+2\,dy\,d\,\delta x+y\,d^{2}\delta x$$
$$+d^{2}x\,\delta y+2\,dx\,d\,\delta y+x\,d^{2}\,\delta y,$$
$$M=d^{2}y,\quad N=2\,dy,\quad P=y$$
$$m=d^{2}x,\quad n=2\,dx,\quad p=x;$$

et par conséquent, les équations de condition ci-dessus deviendront

$$2\,dy-2\,dy=0$$
$$d^{2}y-2\,d^{2}y+d^{2}y=0$$
$$2\,dx-2\,dx=0$$
$$d^{2}x-2\,d^{2}x+d^{2}x=0,$$

d'où il résulte que la fonction proposée est immédiatement intégrable : la partie $y\,\delta x+x\,\delta y$, délivrée du signe $\int$, donne, en l'intégrant par rapport aux variations, $^{n}U=xy$.

332. Nous avons supposé que U contenoit seulement deux variables, x et y; les procédés seroient encore les mêmes, et les résultats parfaitement analogues, s'il en contenoit trois, x, y et z, par exemple; sa différentielle dU seroit de cette forme :

$$dU=M\,dx+N\,d^{2}x+P\,d^{3}x+Q\,d^{4}x+\text{etc.}$$
$$+m\,dy+n\,d^{2}y+p\,d^{3}y+q\,d^{4}y+\text{etc.}$$
$$+\mu\,dz+\nu\,d^{2}z+\pi\,d^{3}z+\rho\,d^{4}z+\text{etc.}$$

et de là on tireroit δU en changeant un d en δ. Il est aisé de voir que la troisième variable z donneroit, sous le signe $\int$, la fonction

$$(\mu-d\nu+d^{2}\pi-d^{3}\rho+\text{etc.})\,\delta z,$$

et hors de ce signe, les termes

$$(r - \mathrm{d}\pi + \mathrm{d}^2\rho - \text{etc.})\delta z + (\pi - \mathrm{d}\rho + \text{etc.})\mathrm{d}\delta z + (\rho - \text{etc.})\mathrm{d}^2\delta z + \text{etc.}$$

Cette marche convient évidemment à un nombre quelconque de variables, et il en résulte que si on vouloit chercher les équations de condition dans ce cas, en égalant à zéro la quantité qui, sous le signe $\int$, multiplie chaque variation indépendante, on auroit, pour une première intégration, autant d'équations que de variables; deux fois autant, s'il s'agissoit de deux intégrations successives; et en général, si m étoit le nombre des variables, et n celui des intégrations à effectuer, on auroit $m\,n$ équations de condition.

Si on supposoit que la différentielle de l'une des variables, celle de x, par exemple, fût constante, on auroit alors, N, P, Q, etc. égaux chacun à zéro, et la variation se réduiroit à

$$\begin{cases} (n - \mathrm{d}p + \mathrm{d}^2 q - \mathrm{d}^3 r + \text{etc.})\delta y + (p - \mathrm{d}q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta y \\ \qquad + (q - \text{etc.})\mathrm{d}^2\delta y + \text{etc.} \\ \quad + \int M\delta x \\ \quad + \int (m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2 p - \text{etc.})\delta y + \text{etc.} \end{cases}$$

et il faut observer que U pouvant dans ce cas être mis sous la forme $V\mathrm{d}x$, on aura, en différentiant, par rapport à x, $M = \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, et par conséquent

$$\int M\delta x = \int \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\,\delta x = V\delta x$$

la partie intégrée seroit donc augmentée de ce terme.

333. Toutes les applications qu'on a faites jusqu'à présent du calcul des variations, ont eu pour objet des

formules intégrales *indéterminées :* j'appelle ainsi les formules générales, telles que $\int y\,dx$, dans laquelle on n'assigne aucune forme particulière à la fonction y. On s'est proposé de trouver la relation qui devoit exister entre y et x, pour que ces formules, prises entre des limites assignées, devinssent des *maxima* ou des *minima ;* avant de passer à ces applications, il est à propos de rappeler ici ce qui a été dit dans le n°. 215, sur la nature des intégrales et sur leur division en *intégrales indéfinies* et en *intégrales définies.* Il ne peut être ici question que des dernières, qui sont les seules susceptibles d'une valeur fixe ; et par conséquent, lorsque nous considérons la variation d'une formule intégrale, cette variation sera nécessairement assujettie aux limites assignées à cette intégrale, limites qui sont ou fixes ou variables, suivant la nature de la question proposée.

Pour éclaircir ceci, nous observerons que la formule $\int V\,dx$ peut toujours représenter la longueur d'une courbe, ou l'aire de cette courbe; alors, si l'on demande la valeur de cette intégrale depuis un point fixe, pris dans le plan de la courbe proposée, jusqu'à une autre qui soit également fixe, et que l'on fasse varier y et x, indépendamment l'un de l'autre, on change momentanément la relation qui existoit entre ces quantités, et par conséquent la nature de la courbe à laquelle elles appartiennent ; mais puisque les points extrêmes sont fixes, il n'existe aucune variation pour eux, et toutes les courbes consécutives que l'on pourroit envisager, doivent passer par ces points (*). S'il

(*) Les variations de x et de y étant regardées comme indépendantes les unes des autres, il s'ensuit nécessairement que celles d'un point n'ont aucune influence sur celles du suivant ; et que par con-

s'agissoit au contraire, d'une formule intégrale relative
FIG. 57. à la courbe AB, *fig.* 57, comprise entre deux autres courbes données AA' et BB', il est évident qu'en faisant varier l'intégrale qui exprime cette longueur, ses limites varient aussi; car en passant de AB à $A'B'$, les extrémités A et B se meuvent, et les abscisses qui répondent au commencement et à la fin de l'intégrale, après qu'elle a varié, ne sont pas celles qui convenoient à son état primitif.

Les développemens que nous avons donnés des variations que reçoivent les formules dans lesquelles il entre des intégrales indéterminées, offrent des moyens d'exprimer ces circonstances suivant la nature des questions qu'on peut avoir à traiter. En effet, ces développemens renferment deux sortes de termes, les uns sont affectés du signe f, les autres en sont délivrés; de-là résulte une distinction importante à faire entre les premiers et les seconds : ceux-ci se rapportent entièrement à des points déterminés de l'intégrale proposée; et les autres représentent la somme de toutes les variations particulières qui affectent séparément chacun des élémens de l'intégrale, compris entre ces points.

Pour bien entendre ceci, il faut se rappeler qu'une intégrale peut être envisagée (209), comme la limite des sommes d'un nombre indéfini d'élémens; et par conséquent, si chacun d'eux varie, le résultat sera égal à la somme de ces variations partielles. Or, des deux parties

---

séquent les courbes consécutives dont nous parlons ici ne sont assujetties à aucunes loix et peuvent être discontinues. Cette remarque sert pour montrer comment les méthodes employées par les Bernoulli et par Euler, pour résoudre le problème des *isopérimètres* auquel s'applique la méthode des variations, se rapprochent de cette méthode.

que contient le développement des variations, ce ne peut être que celle qui est restée sous le signe $\int$, qui représente cette somme des variations particulières à chaque point; car on ne sauroit l'obtenir qu'après avoir établi entre les variables une relation qui permette d'intégrer, tandis que la partie délivrée du signe $\int$ est indépendante de toute relation de cette espèce, et ne peut par conséquent avoir rapport qu'à des points isolés.

334. Cela posé, toutes les expressions que nous avons trouvées dans les articles précédens, pouvant être mises sous cette forme : $\delta\varphi = \downarrow + \int\pi$, si on suppose que $x=a$, $y=b$, etc. soient les valeurs qui répondent à l'origine de l'intégrale, c'est-à-dire, au point où elle est nulle, $x=a'$, $y=b'$, etc. celles qui répondent à la fin, c'est-à-dire, au point où elle est complète; qu'on renferme entre des parenthèses () les quantités relatives au premier point et entre des crochets [] celles qui se rapportent au dernier, on aura pour l'un $(\delta\phi)=(\downarrow)$, pour l'autre $[\delta\phi]=[\downarrow]+[\int\pi]$; et la variation prise dans toute l'étendue de l'intégrale sera exprimée par

$$[\delta\phi]-(\delta\phi)=[\downarrow]-(\downarrow)+[\int\pi].$$

Il est évident que les termes $(\downarrow)$ et $[\downarrow]$, qui ne contiennent que les quantités a, b, etc. a', b', etc. et leurs variations, s'anéantiront d'eux-mêmes lorsque ces quantités seront invariables, ou, ce qui revient au même, lorsque l'intégrale sera prise entre des limites constantes. On a vu, dans le n°. 329, que

$$\begin{aligned}\delta\int U = {} & (N - \mathrm{d}P + \mathrm{d}^2Q - \text{etc.})\delta x + (P - \mathrm{d}Q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta x + \text{etc.}\\ & + (\int M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2P - \mathrm{d}^3Q + \text{etc.})\delta x\\ & + (n - \mathrm{d}p + \mathrm{d}^2q - \text{etc.})\delta y + (p - \mathrm{d}q + \text{etc.})\mathrm{d}\delta y + \text{etc.}\\ & + \int(m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2p - \mathrm{d}^3q + \text{etc.})\delta y,\end{aligned}$$

il s'ensuivra, en ayant égard à ce qui vient d'être dit, que si $\delta\int U$ doit être pris dans les limites indiquées plus haut, on aura

$$[\delta U]-(\delta\int U)=\begin{cases}[N-\mathrm{d}P+\mathrm{d}^2Q-\text{etc.}]\delta x'\\ +[n-\mathrm{d}p+\mathrm{d}^2q-\text{etc.}]\delta y'\\ -(N-\mathrm{d}P+\mathrm{d}^2Q-\text{etc.})\delta x\\ -(n-\mathrm{d}p+\mathrm{d}^2q-\text{etc.})\delta y\end{cases}$$

$$+\begin{cases}+[P-\mathrm{d}Q+\text{etc.}]\mathrm{d}\delta x'\\ +[p-\mathrm{d}q+\text{etc.}]\mathrm{d}\delta y'+\text{etc.}\\ -(P-\mathrm{d}Q+\text{etc.})\mathrm{d}\delta x\\ -(p-\mathrm{d}q+\text{etc.})\mathrm{d}\delta y-\text{etc.}\end{cases}$$

$$+\Big[\int\{M-\mathrm{d}N+\mathrm{d}^2P-\mathrm{d}^3Q+\text{etc.}\}\delta x$$
$$+\int\{m-\mathrm{d}n+\mathrm{d}^2p-\mathrm{d}^3q+\text{etc.}\}\delta y\Big].$$

Toute la première partie de cette expression se réduira à zéro, si δa, $\delta a'$, etc. δb, $\delta b'$, etc. sont nuls; dans le cas contraire, s'il existe des conditions entre ces variations, il faudra y avoir égard, en introduisant dans l'équation précédente les relations données par la nature de la question.

335. Il est important de remarquer que cette expression suppose que l'origine des variables x, y, etc. soit fixe, et que les quantités a, b, etc. a', b', etc. n'entrent point dans la fonction U; car si le contraire avoit lieu, la variation ne seroit point complète, puisqu'en la calculant, on n'auroit pas eu égard à tous les termes qui doivent en faire partie.

Occupons-nous d'abord du cas où la quantité U renfermeroit a, b, etc. a', b', etc. il est évident qu'il faudroit ajouter à l'expression de δU du n°. 329 les termes suivans :

$$A\,\delta a+B\,\delta b+\text{etc.}+A'\,\delta a'+B'\,\delta b'+\text{etc.}$$
$$+A_1\mathrm{d}\delta a+B_1\mathrm{d}\delta b+\text{etc.}+A'_1\mathrm{d}\delta a'+B'_1\mathrm{d}\delta b'+\text{etc.}$$

et les variations δa, δb, etc. $\delta a'$, $\delta b'$, etc. étant indépendantes des variables x, y, etc. passeront hors du signe $\int$, tandis que A, A', etc. $A_{,}$, $A'_{,}$, etc. qui renferment ces variables et leurs différentielles, y resteront soumises; il faudra donc introduire dans la première partie de la variation les termes

$$\delta a \int A + \delta b \int B + \text{etc.} \quad \delta a \int A' + \delta b' \int B' + \text{etc.}$$
$$+ \mathrm{d}\delta a \int A_{,} + \mathrm{d}\delta b \int B_{,} + \text{etc.}, + \mathrm{d}\delta a' \int A'_{,} + \mathrm{d}\delta b' \int B'_{,} + \text{etc.}$$

en ayant soin de prendre ces intégrales entre les mêmes limites que la proposée.

336. Passons maintenant au cas où l'origine des coordonnées est supposée variable; concevons qu'on ait fait $x = x' - a$, $y = y' - b$, et que l'origine des nouvelles coordonnées x', y', etc. soit fixe, mais que les quantités a, b, etc. soient variables; il est évident qu'on aura

$$\delta x = \delta x' - \delta a, \quad \delta y = \delta y' - \delta b, \quad \text{etc.}$$

quant aux différentielles $\mathrm{d}x$, etc. $\mathrm{d}y$, etc. elles n'éprouvent aucune variation par rapport à a ou à b, puisqu'elles ne dépendent pas de ces quantités. Cela posé, substituant les valeurs qu'on vient de trouver dans δU (329), on aura

$$M(\delta x' - \delta a) + N\delta \mathrm{d}x' + \text{etc.}$$
$$+ m(\delta y' - \delta b) + n\delta \mathrm{d}y' + \text{etc.}$$

d'où il suit qu'il faudra joindre à la variation, trouvée dans le n°. cité, les deux termes $-\delta a \int M$, $-\delta b \int m$. Si maintenant on fait a, b, etc. égaux à zéro, sans néanmoins annuller δa, δb, etc. alors x' se changera en x, etc. et les fonctions M, m, seront les mêmes que celles du n°. cité. Il est aisé de voir pourquoi on n'a point annullé les variations δa, δb, car on peut concevoir δa, $\delta b_{,}$ etc. comme le premier degré de grandeur

de a, b, etc. On se convaincra d'ailleurs aisément que si l'origine des abscisses et celle des ordonnées ont un mouvement, on peut le transporter aux abscisses et aux ordonnées elles-mêmes, pourvu que ce soit avec un signe contraire, et écrire par conséquent $\delta x - \delta a$ et $\delta y - \delta b$, au lieu de δx et de δy. Les intégrales fM et fm doivent être prises dans les mêmes limites que la proposée.

Des maxima *et des* minima *des formules intégrales indéterminées.*

337. L'application vraiment spéciale du Calcul des variations, a pour objet les *maxima* et les *minima* des formules intégrales indéterminées ; elle est fondée sur les mêmes principes que la théorie générale des *maxima* et des *minima* des fonctions déterminées, exposée dans le n°. 134. En effet, si on représente dx, dy, d^2x, etc. par x_1, y_1, x_2, etc. le résultat de la substitution de

$$x+\delta x,\ y+\delta y,\ x_1+\delta x_1,\ \ldots x_2+\delta x_2,\ \text{etc.}$$

dans une fonction quelconque de x, y, dx, dy, d^2x, etc. pourra s'ordonner comme celui de la substitution de

$$x+dx, y+dy,\ x_1+dx_1,\ y_1+dy_1,\ \ldots x_2+dx_2,\ \text{etc.}$$

qu'on obtiendroit facilement en suivant la marche du n°. 121, et en changeant d en δ. Mais sans faire ce développement, il suffit de remarquer que si l'on désigne par u la fonction proposée, on trouvera pour les deux premiers termes $u+du$, qui deviendront $u+\delta u$; et δu ne contenant que des termes dans lesquels δx, δy,... δx_1, δy_1, δx_2, etc. ne montent qu'au premier degré, et qui pourront par conséquent changer

de signe, devra s'anéantir lors du *maximum* ou du *minimum*, en vertu des articles rappelés ci-dessus : on aura donc pour l'un et l'autre cas, $\delta u = 0$. Maintenant si $u = \int U$, il viendra $\delta U = 0$, à cause de $\delta u = \int \delta U$; et comme le développement de $\int \delta U$ est composé de deux parties, l'une de la forme

$$A\,\delta x + B\,\delta y \ldots + A'\mathrm{d}\,\delta x + B'\mathrm{d}\,\delta y + \text{etc.}$$

l'autre de la forme

$$\int (\varphi\,\delta x + \chi\,\delta y + \ldots\ldots),$$

qu'on ne sauroit comparer entr'elles, puisque la dernière n'est point intégrable tant que δx et δy conservent l'indépendance qu'exige la généralité du calcul, on ne peut faire évanouir ce développement qu'en égalant séparément à zéro, dans l'une et l'autre de ses parties, les quantités qui multiplient les variations indépendantes. D'après ces principes, la fonction soumise au signe $\int$ donne les équations indéterminées $\phi = 0$, $\chi = 0$, etc. et quant à la fonction délivrée de ce signe, il faut égaler aussi à zéro le coefficient de chacune des variations qui restent indépendantes après qu'on a eu égard aux relations qui résultent des conditions relatives aux limites de u, en observant que les variations

$$\mathrm{d}\,\delta x,\ \mathrm{d}^2\,\delta x, \ldots\ldots \mathrm{d}\,\delta y,\ \mathrm{d}^2\,\delta y \ldots\ldots$$

ne sont point liées en général avec δx, δy, etc. Les équations qu'on tirera de la partie dégagée du signe $\int$ appartenant à des points particuliers seront déterminées.

Pour compléter la théorie des *maxima* et des *minima* des formules intégrales indéterminées, il resteroit à assigner les caractères auxquels on peut distinguer le *maximum* du *minimum*; et il est aisé de voir qu'ici, comme dans le cas ordinaire, ces caractères dépendent en général de l'examen des termes du second ordre,

dans le développement de la valeur consécutive à u, mais en prenant, comme ci-dessus, ce développement par rapport à la caractéristique δ. Nous n'entrerons pas ici dans cette recherche qui est fort délicate (voyez *le Traité du Calc. diff. et du Calc. int.*), nous nous bornerons à éclaircir ce qui précède par quelques exemples.

358. Soit d'abord $\int\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$; en prenant la variation, on aura

$$\delta\left(\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\right)=\frac{\mathrm{d}x\,\delta\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\,\delta\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}};$$

comparant cette expression avec celle de δU (329), et faisant $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\mathrm{d}s$, on trouvera

$$M=0,\quad N=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\quad m=0,\quad n=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},$$

et par conséquent

$$\delta\int U=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\delta x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\delta y-\int\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}.\delta x-\int\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}.\delta y.$$

En égalant à zéro les deux termes affectés du signe $\int$, on ne trouvera que l'équation $\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x=0$, qui revient à $\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$, et dont l'intégrale est par conséquent $y=Cx+C'$.

Si l'intégrale $\int\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ doit être prise entre les limites

$$x=a,\quad y=b,\quad x=a',\quad y=b',$$

a' et b' étant des quantités invariables, la partie de la variation délivrée du signe $\int$ s'anéantit d'elle-même à cause de

$$\delta a=0,\quad \delta b=0,\quad \delta a'=0,\quad \delta b'=0,$$

et les constantes C et C' doivent être déterminées de manière

manière qu'en faisant successivement $x=a$, $x=a'$, on ait $y=b$, $y=b'$.

La question que nous venons de résoudre, rapportée à la Géométrie, a pour objet de trouver la ligne la plus courte qu'on puisse mener entre deux points pris sur un plan, et notre résultat nous a conduits à l'équation d'une ligne droite, ainsi que cela devoit arriver.

Si le premier point étoit fixe, et que le dernier fût variable, on auroit seulement δa, δb, égaux à zéro, et il resteroit l'équation $da'\delta a'+db'\delta b'=0$. Pour y satisfaire, en supposant que le dernier point doive se trouver sur une courbe ayant pour équation $dy'=\beta dx'$, il faudra qu'on ait $\delta b'=\beta\delta a'$; substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouvera $da'+\beta db'=0$, et par conséquent $\frac{db'}{da'}=-\frac{1}{\beta}$, ce qui nous apprend que la droite cherchée doit couper à angles droits la courbe proposée. Il faudra donc déterminer les constantes C et C' par les deux conditions suivantes : 1°. qu'elle passe par le point fixe; 2°. qu'elle soit perpendiculaire à la courbe donnée par l'équation

$$dy'=\beta dx'.$$

Satisfaire à ces conditions, c'est résoudre des problêmes qui n'entrent pas dans notre sujet ; mais nous devons faire remarquer l'avantage que procurent les équations déterminées. Quoique l'équation $y=Cx+C'$ appartienne à la ligne qui est la plus courte entre deux points quelconques, il est évident que lorsque ces points ne sont pas déterminés, ainsi qu'il arrive dans la dernière hypothèse, on peut tirer une infinité de lignes droites qui, à la vérité, sont plus courtes que les lignes d'une autre nature, menées par les mêmes points, mais qui

étant inégales entr'elles, doivent avoir lieu à un *minimum* relatif. Le caractère qui convient à ce *minimum* ne sauroit être déduit de l'équation indéterminée; et l'idée qui se présente la première pour le trouver, seroit de chercher à exprimer la valeur de l'intégrale $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ en fonction des constantes C et C', ce qu'on pourroit faire, en prenant la valeur de x et de y, à l'aide de l'équation de la courbe donnée et de celle de la plus courte ligne; différentiant ensuite le résultat de cette substitution, on auroit les valeurs de C et C' qui conviennent au *maximum* ou au *minimum* cherchés: mais les équations déterminées présentent un chemin plus court pour arriver au résultat, puisqu'elles font connoître immédiatement quelle est la condition à laquelle il faut satisfaire pour l'obtenir.

339. Proposons-nous pour second exemple

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2};$$

nous aurons

$$\delta\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\frac{dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

Soit pour abréger, $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=ds$; en comparant aux formules du n°. 329, il viendra

$$M=0,\quad N=\frac{dx}{ds},\quad m=0,\quad n=\frac{dy}{ds},\quad \mu=0,\quad \nu=\frac{dz}{ds};$$

et si on regarde les trois variables x, y, z, comme indépendantes, on trouvera, en égalant séparément à zéro les multiplicateurs des variations δx, δy, δz, les trois équations

$$d\frac{dx}{ds}=0\quad d\frac{dy}{ds}=0,\quad d\frac{dz}{ds}=0,$$

dont deux suffiront pour déterminer la ligne droite qui

résout la question proposée, savoir : celle de trouver la plus courte ligne qu'on puisse mener entre deux points de l'espace.

Mais si on veut que cette ligne soit toute entière sur une surface courbe, ayant pour équation

$$dz = \alpha\, dx + \beta\, dy,$$

il faudra que cette relation ait perpétuellement lieu entre les coordonnées x, y et z, quelques variations qu'elles subissent d'ailleurs; on aura donc $\delta z = \alpha\, \delta x + \beta\, \delta y$, et il n'y aura que les deux variations δx et δy qui soient indépendantes. En substituant dans la variation de la fonction proposée, on trouvera :

$$\left(\frac{dx}{ds} + \alpha\frac{dz}{ds}\right) d\,\delta x + \left(\frac{dy}{ds} + \alpha\frac{dz}{ds}\right) d\,\delta y$$

et les formules du n°. 329, donneront immédiatement

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \alpha\, d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0, \quad d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \beta\, d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Ces deux équations se réduisent à une seule, et l'on peut s'en assurer en les ajoutant ensemble, après avoir multiplié la première par $2\frac{dx}{ds}$, et la seconde par $2\frac{dy}{ds}$; car on a alors

$$2\frac{dx}{ds} d\left(\frac{dx}{ds}\right) + 2\frac{dy}{ds} d\left(\frac{dy}{ds}\right) + 2\frac{(\alpha dx + \beta dy)}{ds} d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

ou, en mettant dz pour $\alpha\, dx + \beta\, dy$ et en intégrant,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = C = 1,$$

équation identique : il suffira donc d'employer l'une quelconque de celles que l'on vient de trouver. Lorsque l'on voudra l'appliquer à une surface courbe en particulier, on mettra, au lieu de α, sa valeur en x, y, tirée de l'équation de cette surface, ainsi que celle de dz;

le résultat étant différentiel du second ordre, l'intégration introduira deux constantes arbitraires, qu'il faudra déterminer pour satisfaire aux conditions des points extrêmes, et dont la valeur s'obtiendra en assujettissant la ligne cherchée à passer par ces points, s'ils sont fixes; mais s'il s'agissoit de trouver la plus courte ligne menée, d'un point fixe à une courbe donnée, il faudroit avoir égard à l'équation du dernier point, qui est

$$\left(\frac{\mathrm{d}a'+\alpha\,\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\right)\delta a'+\left(\frac{\mathrm{d}b'+\beta\,\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\right)\delta b'=0.$$

Soit $\mathrm{d}y'=\gamma\,\mathrm{d}x'$ l'équation de projection en x, y, de la courbe donnée; on aura $\delta b'=\gamma\delta a'$, et par conséquent,

$$(\mathrm{d}a'+\alpha\,\mathrm{d}z')+(\mathrm{d}b'+\beta\,\mathrm{d}z')\gamma=0;$$

avec un peu d'attention, on reconnoîtra qu'en vertu de cette condition, la courbe résultante de l'équation indéterminée doit couper la courbe donnée à angles droits; s' et z' désignent ici ce que deviennent s et z lorsqu'on met a' et b' au lieu de x et y, dans l'équation de la surface proposée.

Enfin, s'il s'agissoit de trouver la plus courte ligne qu'on puisse mener entre deux courbes, il faudroit de plus avoir égard à la variation du premier point; et comme elle fournit une équation entièrement semblable à celle du dernier, on en conclura que la ligne cherchée doit être perpendiculaire à la fois aux deux courbes données.

340. Cherchons quelle doit être la relation entre les variables x et y, pour que la formule $\int\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\sqrt{2(y-K)}}$

soit un *minimum* (*); on aura

$$\delta U = \delta\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2(y-K)}}\right),$$

et si on fait pour abréger

$$\sqrt{2(y-K)} = u \qquad \sqrt{dx^2+dy^2} = ds,$$

il viendra

$$\delta U = \delta\left(\frac{ds}{u}\right) = \frac{-ds\,\delta y}{u^3} + \frac{dx\,\delta dx}{u\,ds} + \frac{dy\,\delta dy}{u\,ds},$$

et par conséquent (329)

$$M = 0 \quad , \quad N = \frac{dx}{u\,ds},$$

$$m = -\frac{ds}{u^3}, \quad n = \frac{dy}{u\,ds}.$$

La partie de la variation affectée du signe $\int$ donnera d'abord $dN = 0$, $m - dn = 0$; l'une de ces équations suffit pour déterminer la courbe : nous prendrons la première parce qu'elle est la plus simple, et comme elle donne $N = C$, nous en conclurons

$$\frac{dx}{u\,ds} = C \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{ds} = Cu = C\sqrt{2(y-K)},$$

d'où on tire

$$dx = \frac{C\,dy\sqrt{2(y-K)}}{\sqrt{1-2C^2(y-K)}}.$$

Si l'intégrale $\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2(y-K)}}$ doit être prise de-

(*) Ce problème est celui de la brachystochrône, ou de la courbe le long de laquelle un corps descend dans le moins de temps possible d'un point à un autre.

puis $x=a$, $y=b$, jusqu'à $x=a'$, $y=b'$, on aura, pour le premier et le dernier point, les équations suivantes

$$\left.\begin{aligned}(N)\delta a+(n)\delta b&=0\\ [N]\delta a'+[n]\delta b'&=0\end{aligned}\right\}.$$

Supposons pour plus de généralité que la constante K soit fonction des quantités a et b; il faudra alors, d'après ce qui a été dit, n°. 335, faire varier l'intégrale proposée par rapport à ces quantités, en sorte qu'on aura de plus les termes

$$-\left(\frac{dK}{da}\delta a+\frac{dK}{db}\delta b\right)\int\frac{ds}{u^3},$$

à ajouter à la première des équations précédentes, qui deviendra

$$\left\{(N)-\frac{dK}{da}\left(\int\frac{ds}{u^3}\right)\right\}\delta a + \left\{(n)-\frac{dK}{db}\left(\int\frac{ds}{u^3}\right)\right\}\delta b=0.$$

Il reste à déterminer maintenant les quantités (N), $[N]$, (n), $[n]$, ainsi que l'intégrale $\int\frac{ds}{u^3}$, qui doit être prise entre les limites

$$x=a,\quad y=b,\quad \text{et } x=a',\quad y=b';$$

or, l'équation $m-dn=0$ donne

$$-\frac{ds}{u^3}-d.\frac{dy}{u\,ds}=0,$$

et en intégrant,

$$-\int\frac{ds}{u^3}=C+\frac{dy}{u\,ds}.$$

Mais parce que l'intégrale doit commencer au point dont les coordonnées sont $x=a$, $y=b$, il s'ensuit

qu'on a $C'+\left(\frac{dy}{u\,ds}\right)=0$, ou $C'=-(n)$, pour ce point; et pour le dernier, il viendra

$$-\int\frac{ds}{u^3}=[n]-(n),$$

d'où il suit

$$\left\{(N)-\frac{dK}{da}\{(n)-[n]\}\right\}\delta a+\left\{(n)-\frac{dK}{db}\{(n)-[n]\}\right\}\delta b=0$$

$$[N]\delta a'+[n]\delta b'=0.$$

Ces équations peuvent être simplifiées en observant que $N=\frac{dx}{u\,ds}=C$, que par conséquent $(N)=[N]=C$; et si l'on suppose que a et b, a' et b', appartiennent à des courbes données par les équations

$$da=\lambda\,db,\qquad da'=\lambda'db',$$

les précédentes deviendront

$$\left\{C-\frac{dK}{da}\{(n)-[n]\}\right\}\lambda+\left\{(n)-\frac{dK}{db}\{(n)-[n]\}\right\}=0$$

$$C\lambda'+[n]=0.$$

Lorsque $\frac{dK}{da}$ et $\frac{dK}{db}$ seront nuls, on aura

$$C\lambda+(n)=0,\quad C\lambda'+[n]=0;$$

et à cause que

$$C=\frac{dx}{u\,ds},\quad (n)=\left(\frac{dy}{u\,ds}\right),$$

on en conclura

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{C}{(n)}=-\frac{1}{\lambda}=-\frac{db}{da};$$

on trouvera de même

$$\left[\frac{dx}{dy}\right]=\frac{C}{[n]}=-\frac{1}{\lambda'}=-\frac{db'}{da'},$$

ce qui nous apprend que la courbe cherchée doit couper à angles droits les deux courbes données.

Enfin, lorsqu'on fait $K=b$, il vient

$$\frac{dK}{da}=0 \qquad \frac{dK}{db}=1;$$

l'équation

$$\left\{C-\frac{dK}{da}\{(n)-[n]\}\right\}\lambda+\left\{(n)-\frac{dK}{db}\{(n)-[n]\}\right\}=0,$$

relative au premier point, se réduit à $C\lambda+[n]=0$; l'équation relative au dernier, demeurant la même, il suit de là que $\lambda=-\frac{[n]}{C}=\lambda'$, d'où l'on voit que la deuxième courbe donnée doit encore être coupée à angle droit par la courbe cherchée, et que la tangente de la première, au point où elle rencontre la courbe cherchée, doit être parallèle à celle de la seconde, menée par son intersection avec la même courbe.

341. Les questions que nous avons traitées précédemment se rapportent à des *maxima* ou à des *minima* absolus; mais il s'en présente pour lesquelles on exige des *maxima* ou des *minima* relatifs. En voici un exemple: *Parmi toutes les relations que peuvent avoir entr'elles les variables* x, y, *et qui donnent une même valeur à l'intégrale indéterminée* $\int U$, *prise depuis* $x=a$ *jusqu'à* $x=a'$, *trouver celle qui rend la formule* $\int U'$ *un* maximum *ou un* minimum, *dans les mêmes circonstances.* Nous n'entrerons point ici dans le détail de la solution de cette question, nous nous bornerons à dire qu'elle consiste à égaler à zéro la variation $\delta\int U+C\,\delta\int U'$, C étant un coefficient constant indéterminé.

APPENDICE

AU

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTEGRAL.

Des différences et des Séries.

Du Calcul direct des Différences.

Dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, nous n'avons envisagé les séries que comme un moyen de développer les fonctions algébriques ou transcendantes, de manière à faire connoître quelques-unes des propriétés de ces fonctions, que la forme sous laquelle elles se présentoient ne rendoit pas assez évidentes, ou bien pour en obtenir, dans certains cas, des valeurs approchées. Sous ces différens points de vue, nous avons toujours connu l'origine des séries dont nous avons fait usage, et nous ne nous sommes occupés de leurs propriétés que par rapport aux fonctions dont elles dérivoient; maintenant nous allons les considérer en elles-mêmes et indépendamment d'aucune fonction particulière.

342. Supposons qu'on ait une série de la forme

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\text{etc.}$$

dans laquelle les chiffres inférieurs affectés aux coefficiens des puissances de x, et que je nommerai *indices*, font connoître le rang qu'occupe chaque terme. Ce qui distingue cette série de toute autre, c'est la loi que suivent les coefficiens des diverses puissances de x; or, quelle que soit cette loi, il est évident que la valeur de chaque coefficient en particulier dépend du rang qu'il occupe dans la série, en sorte que si l'on avoit l'expression du terme général A_nx^n, qui répond à un indice quelconque, on en déduiroit tous les autres, en donnant à n différentes valeurs; car A_0, A_1, A_2, A_3, etc. ne sont autre chose que ce que devient A_n lorsqu'on y fait successivement

$$n=0,\quad n=1,\quad n=2,\text{ etc.}$$

Faisons donc abstraction de x, ou, ce qui revient au même, faisons $x=1$, et considérons seulement la série des coefficiens A_0, A_1, A_2, A_3, etc. comme représentant la suite des divers états par lesquels passe la fonction A_n, en vertu des accroissemens que reçoit l'indice n.

Soit fait

$$A_1-A_0=B_0$$
$$A_2-A_1=B_1$$
$$A_3-A_2=B_2$$
$$\text{etc.}$$

les quantités B_0, B_1, B_2, etc. qui sont les différences qui règnent entre les termes de la suite précédente, formeront elles-mêmes une nouvelle suite dont la nature dépendra de celle de la première.

Si l'on avoit, par exemple, $A_n=3+2n$, en posant

successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc. on obtiendroit pour les A la suite des nombres 3, 5, 7, 9, etc. et les B seroient tous égaux à 2; en effet, la suite proposée ne seroit autre chose que la *progression par différences* (*).

Dans le cas où les quantités B_0, B_1, B_2, B_3, etc. ne sont pas toutes égales entr'elles, on en peut déduire une nouvelle suite, en prenant leurs différences; et faisant

$$B_1-B_0=C_0$$
$$B_2-B_1=C_1$$
$$B_3-B_2=C_2$$
etc.

on aura à considérer la série

$$C_0,\quad C_1,\quad C_2,\quad C_3,\quad \text{etc.}$$

Soit pour exemple $A_n=5+3n^2$; il résultera de cette fonction 5, 8, 17, 32, etc.

pour les nombres A;

3, 9, 15, etc.

pour les nombres B;

enfin 6, 6, 6, etc.

pour les nombres C, qui, comme on voit, sont constans. Ces exemples suffisent pour montrer comment on a pu remarquer les différens ordres des séries, en comparant entr'eux les termes successifs d'une même série.

Les quantités B_0, B_1, B_2..., se nomment les *diffé-*

(*) C'est ainsi que j'appellerai désormais la progression arithmétique, et je donnerai à la progression géométrique le nom de *progression par quotiens*. Voyez la seconde édition des *Elémens d'Algèbre*, à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations.

rences premières, ou simplement les différences des quantités A_0, A_1, A_2, etc.

Les quantités C_0, C_1, C_2, etc. qui sont les différences premières de B_0, B_1, B_2, etc. ou les différences des différences de A_0, A_1, A_2, etc. se nomment les *différences secondes* de celles-ci.

Il y a entre les quantités A, B, C, etc. des relations qu'il est important de connoître, et au moyen desquelles on détermine les unes par les autres ; ce sont ces relations qui constituent le *Calcul direct des différences.*

343. Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ une suite de quantités qu'on suppose être des valeurs consécutives que reçoit la fonction u, soit en vertu des variations qu'elle éprouve par elle-même, soit par l'effet de celles qui arrivent à des quantités dont elle dépend ; nous ferons

$$\left.\begin{array}{ll} u_1 - u & = \Delta u \\ u_2 - u_1 & = \Delta u_1 \\ u_3 - u_2 & = \Delta u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u_n - u_{n-1} & = \Delta u_{n-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

en nous servant de la caractéristique Δ, pour désigner la différence qui existe entre les deux états consécutifs d'une même quantité. Lorsque cette quantité varie par des degrés égaux, les différences Δu, Δu_1, Δu_2, etc. sont toutes égales ; mais si le contraire a lieu, on fera par analogie

$$\left.\begin{array}{llll} \Delta u_1 - \Delta u & = \Delta . \Delta u & = \Delta^2 u & \\ \Delta u_2 - \Delta u_1 & = \Delta . \Delta u_1 & = \Delta^2 u_1 & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \\ \Delta u_n - \Delta u_{n-1} & = \Delta . \Delta u_{n-1} & = \Delta^2 u_{n-1} & \\ \text{etc.} & & & \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (2),$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = 1.\Delta^2 u = \Delta^3 u \\ \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = \Delta.\Delta^2 u = \Delta^3 u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^2 u_n - \Delta^2 n_{n-1} = \Delta.\Delta^2 u_{n-1} = \Delta^3 u_{n-1} \\ \text{etc.}\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (3),$$

Cela posé, on aura, en vertu des équations (1), (2), (3),

$_1 = u + \Delta u$	$\Delta u_1 = \Delta u + \Delta^2 u$	
$_2 = u_1 + \Delta u_1$	$\Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1$	$\Delta^2 u_1 = \Delta^2 u + \Delta^3 u$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$= u_{n-1} + \Delta u_{n-1}$	$\Delta u_{n-1} = \Delta u_{n-2} + \Delta^2 u_{n-2}$	$\Delta^2 u_{n-2} = \Delta^2 u_{n-3} + \Delta^3 u_{n-3}$

Par le moyen de ces valeurs, on peut arriver à des expressions de u_1, u_2, u_3.... u_n, qui ne dépendent que de la quantité primordiale u, et de ses différences successives Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. En faisant les substitutions nécessaires on obtiendra

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \Delta u \\ u_2 &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u \\ u_3 &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où on conclura par analogie

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

puisque les coefficiens numériques des expressions précédentes sont les mêmes que ceux des puissances du binome : on pourroit d'ailleurs facilement vérifier d'une manière générale cette conclusion.

On peut également exprimer la différence d'un ordre quelconque, $\Delta^n u$, par le moyen des valeurs consécutives u, u_1, u_2.....etc. on tire d'abord des

équations (1), (2), (3),

$$\Delta u = u_1 - u$$
$$\Delta^2 u = u_2 - 2u_1 + u$$
$$\Delta^3 u = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et l'analogie indique l'expression générale

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} + \text{etc.}$$

Il suit de ce qui précède que l'on peut écrire les équations

$$u_n = (1+\Delta u)^n, \qquad \Delta^n u = (u-1)^n,$$

pourvu que l'on se rappelle de changer dans le développement de la première, les exposans des puissances de Δu en exposans de la caractéristique Δ, et que dans celui de la seconde, on transforme les exposans de u en indices.

344. Lorsqu'une fonction est donnée, rien n'est plus facile que d'en obtenir les différences successives; nous prendrons d'abord pour exemple la fonction x^m. Faisons $u = x^m$, et supposons que x augmente de la quantité h, nous aurons $u_1 = (x+h)^m$, et par conséquent

$$\Delta u = (x+h)^m - x^m = m x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} h^3 + \text{etc.}$$

Pour passer aux différences ultérieures $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. il faut faire varier x de nouveau, ce qui présente deux hypothèses, l'une consiste à supposer que la quantité x prenne toujours des accroissemens égaux, et l'autre que

ces accroissemens soient eux-mêmes variables; nous nous occuperons d'abord de la première. En substituant $x+h$ au lieu de x dans Δu, on aura

$$\Delta u_1 = mh(x+h)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}h^2(x+h)^{m-2} + \text{etc.}$$

Il est visible que si l'on développe l'expression de Δu_1, et que l'on en retranche celle de Δu, le résultat ordonné par rapport aux puissances de h, sera de la forme

$$\Delta^2 u = m(m-1)x^{m-2}h^2 + M_3 x^{m-3}h^3 + M_4 x^{m-4}h^4 + \text{etc.}$$

M_3, M_4, etc. désignant des coefficiens dépendans de l'exposant m.

Par une nouvelle substitution de $x+h$ dans cette dernière équation, on parviendroit à $\Delta^2 u_1$, et, en observant que $\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u$, on obtiendroit

$$\Delta^3 u = m(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3 + M'_4 x^{m-4} + \text{etc.}$$

La loi des premiers termes de chacun de ces développemens est évidente, et l'on voit que l'expression de $\Delta^n u$ doit commencer par

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}h^n ;$$

mais pour parvenir au terme général de cette expression, il sera plus facile de former immédiatement $\Delta^n u$, par le moyen des valeurs de u_1, u_2, u_3, etc. sans passer par celles de Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. Il est évident que dans l'hypothèse présente les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots u_n,$$

répondent à

$$x+h, \quad x+2h, \quad x+3h, \ldots . x+nh,$$

et que l'on a par conséquent

$$u_1 = (x+h)^m, \quad u_2 = (x+2h)^m, \ldots . u_n = (x+nh)^m ;$$

on tirera de-là

$$\Delta^n u = [x+nh]^m - \frac{n}{1}[x+(n-1)h]^m + \frac{n(n-1)}{1.2}[x+(n-2)h]^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}[x+(n-3)h]^m + \text{etc.}$$

Si l'on désigne par i l'exposant de h dans le terme général du développement de l'équation ci-dessus, l'expression de ce terme sera

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i} x^{m-i}h^i \times \left\{n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{etc.}\right\};$$

mais comme nous avons observé que le développement de $\Delta^n u$ ne pouvoit contenir des puissances de h dont l'exposant fût moindre que n, il s'ensuit que la fonction

$$n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{etc.}$$

est nulle tant que $i<n$, ce qu'il est aisé de vérifier. D'un autre côté, le coefficient

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i}$$

s'évanouissant lorsque $i=m+1$; il en résulte que la plus haute puissance de h, dans le développement de $\Delta^n u$, ne peut être que h^m et que par conséquent $\Delta^n u$ se réduit à son premier terme

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 2.1.h^n$$

dans le cas où l'on a $m=n$. Il est évident qu'alors les différences ultérieures $\Delta^{n+1} u$, $\Delta^{n+2} u$, etc. sont nulles.

Il

Il est facile de conclure de-là que toute fonction rationnelle et entière de x a toujours des différences constantes, savoir : celles dont l'ordre est marqué par l'exposant de la plus haute puissance de x, qui soit dans la fonction proposée. En effet, cette fonction étant de la forme $Ax^{\alpha}+Bx^{\zeta}+Cx^{\gamma}+$ etc. on aura nécessairement

$$\Delta^{n}(Ax^{\alpha}+Bx^{\zeta}+Cx^{\gamma}+\text{etc.})= A\Delta^{n}.x^{\alpha}+B\Delta^{n}.x^{\zeta}+C\Delta^{n}.x^{\gamma}+\text{etc.}\ (*);$$

et si α désigne le plus haut exposant de x, il viendra pour le cas où $n=\alpha$,

$$\Delta^{\alpha}.x^{\alpha}=1.2.....\alpha h^{\alpha}, \quad \Delta^{\alpha}.x^{\zeta}=0, \quad \Delta^{\alpha}.x^{\gamma}=0, \text{ etc.}$$

en sorte que

$$\Delta^{\alpha}(Ax^{\alpha}+Bx^{\zeta}+Cx^{\gamma}+\text{etc})=1.2.3.....\alpha Ah^{\alpha}.$$

Il n'est pas nécessaire d'avertir que chaque fois qu'on prend la différence de deux fonctions, cette opération peut faire disparoître une constante ; car les calculs précédens ne diffèrent de ceux du n°. 8, qu'en ce que nous avons considéré en même temps tous les termes du développement de la différence, au lieu de nous borner au premier, comme pour le Calcul différentiel.

Au moyen de ce qui précède on développeroit sans difficulté les différences d'une fonction composée de puissances quelconques de x. Avant de pousser plus loin, il convient de montrer comment les mêmes développemens, et en général ceux des différences des

(*) Il ne faut pas confondre $\Delta^{n}.x^{\alpha}$ avec $\Delta^{n}x^{\alpha}$; car la première de ces expressions est la différence de l'ordre n de la fonction x^{α}, tandis que $\Delta^{n}x^{\alpha}=(\Delta^{n}x)^{\alpha}$.

316. A l'aide du théorême de Taylor, le développement des différences d'un ordre quelconque pour une

---

auront bien saisi l'origine de cette notation dans le n°. 5, puissent révoquer en doute son analogie avec les principes que Lagrange emploie dans sa *Théorie des fonctions analytiques*; elle est même plus propre que toute autre à en rappeler le souvenir. Quelles que soient les notions préliminaires, *le coefficient différentiel*, ou *la fonction prime* (d'après Lagrange), sera toujours la fonction qui multiplie la première puissance de l'accroissement dans le développement de la différence de la fonction primitive; en prenant le premier terme seul on aura une différence tronquée ou *une différentielle*, et cela, *sans rien prononcer sur sa grandeur absolue, sans rappeler en aucune manière l'idée d'infiniment petit.* Le changement de métaphysique ne sauroit donc conduire à un changement de notation, si, comme il est aisé de s'en convaincre, la notation ancienne a des avantages marqués sur celles qu'on voudroit lui substituer. Il faut d'abord observer qu'elle doit être débarrassée des parenthèses qu'Euler employoit. En effet, $\frac{d\zeta}{dx}$ et $\frac{d\zeta}{dy}$ sont aussi clairs que $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)$; car le sens de la question indique toujours si les variables x et y sont indépendantes ou non, et empêche qu'on ne confonde l'expression $\frac{d\zeta}{dx}$ avec $\frac{\frac{d\zeta}{dx}dx+\frac{d\zeta}{dy}dy}{dx}$, qui ne signifie quelque chose qu'autant qu'on regarde (au moins implicitement) y comme une fonction de x, voyez d'ailleurs le n°. 126.

Les notations employées dans la *Théorie des Fonctions* ne me paroissent pas offrir les mêmes avantages. Les accens ne peuvent servir seuls, que lorsqu'il s'agit des fonctions d'une ou de deux variables, en affectant les accens supérieurs aux variations de l'une et les accens inférieurs à celles de l'autre. Pour aller au-delà, l'illustre Auteur de cet ouvrage, écrit entre parenthèses la quantité ou les quantités qu'il regarde comme variables, et désigne par

$f'(x)$, $f'(y)$, $f'(\zeta)$,
$f''(x)$, $f''(y)$, $f''(\zeta)$, $f^{\prime\prime}(x,y)$, $f^{\prime\prime}(x,\zeta)$, $f^{\prime\prime}(y,\zeta)$,

fonction quelconque s'obtient sans difficulté : on a premièrement

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

---

les coefficiens différentiels du premier et du second ordre pour la fonction $f(x, y, z)$ (Théorie des fonctions, page 198). Il a modifié depuis sa notation dans le traité qu'il a publié sur la résolution des équations numériques, où il représente les mêmes coefficiens comme il suit,

$$\left(\frac{Z'}{x'}\right),\ \left(\frac{Z'}{y'}\right),\ \left(\frac{Z'}{z'}\right)$$

$$\left(\frac{Z''}{x'^2}\right),\ \left(\frac{Z''}{y'^2}\right),\ \left(\frac{Z''}{z'^2}\right),\ \left(\frac{Z''}{z'y'}\right),\ \left(\frac{Z''}{x'z'}\right),\ \left(\frac{Z''}{y'x'}\right).$$

Z étant la fonction primitive proposée.

En partageant avec toute l'Europe le respect attaché au nom et aux travaux de Lagrange, j'oserai néanmoins n'être pas de l'avis de cet homme si justement célèbre, sur les motifs qui paroissent le porter à introduire cette nouvelle manière d'écrire les résultats du Calcul différentiel ; car je crois avoir prouvé dans ce qui précède que l'ancienne n'a point en elle-même l'inconvénient de *rappeler continuellement l'idée fausse des infiniment petits*, et je demanderai si la multitude de parenthèses très-resserrées, qui résulteroit des signes qu'il propose, ne rendroit pas les formules aussi longues et aussi chargées, que l'emploi de la caractéristique d. J'avouerai même que sa seconde notation ne comportant point de dénominateurs qui, dans l'impression, exigent une double ligne, me paroît préférable à sa dernière, semblable à celles d'Euler et de Waring, dont elle ne diffère que par les accens qui tiennent la place des d, dont le premier se servoit avec tous les Géomètres sortis de l'école de Léibnitz, et des points dont le second a fait usage, ainsi que tous les Géomètres Anglois. Voici un exemple de chacune de ces notations:

$$\left(\frac{d^3Z}{dx^2dy}\right),\quad \left(\frac{\dddot{Z}}{\dot{x}^2\dot{y}}\right),\quad \left(\frac{Z''}{x'^2y'}\right).$$

J'observerai que la dernière priveroit souvent les analystes de la

et comme Δu_1 est ce que devient Δu, lorsque x se change en $x+h$, il s'ensuit

$$\Delta u_1 = \Delta u + \frac{d\Delta u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Delta u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

---

faculté de représenter des quantités analogues par la même lettre accentuée diversement, ce qui seroit un inconvénient assez grave.

C'est, je pense, un principe avoué de tout le monde, qu'il ne faut changer les signes reçus que lorsqu'ils sont en contradiction manifeste avec les idées qu'ils doivent représenter, ou lorsqu'on peut les abréger, ou enfin lorsqu'en les modifiant, on les rend propres à développer de nouveaux rapports qu'on n'auroit pas apperçus sans cela. Les signes du Calcul différentiel ne sont dans aucun de ces cas : tout ce dont Lagrange a enrichi l'Analyse dans sa *Théorie des Fonctions*, et dans son traité *de la Résolution des équations numériques*, peut être exprimé avec autant de simplicité que d'élégance par les caractères usités, comme on peut le voir dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (in-4°.) pour lequel j'ai profité avec empressement de plusieurs remarques importantes insérées dans les excellens écrits que je viens de citer. Il y a plus, j'ai la persuasion que le Calcul des fonctions ne sauroit atteindre à rien que le grand Géomètre, qui en est l'inventeur, ne puisse déduire du Calcul différentiel. On ne sauroit d'ailleurs contester que le passage de l'Algèbre au Calcul différentiel, ce dernier étant présenté comme l'a fait Lagrange dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1772, ou, comme je l'ai fait d'après lui, dans le premier volume de mon Traité *in-4.* et même par les limites comme dans celui-ci, ne soit aussi simple que le passage de l'Algèbre au Calcul des fonctions. Enfin, je crois qu'avant d'adopter de nouveaux signes, il faut penser à l'embarras qu'éprouveroient ceux qui étudient les mathématiques, d'avoir à rapprocher sans cesse des formules et des opérations analogues rendues par des caractères différens; et c'est la crainte de voir ouvrir cette nouvelle source de difficultés, qui m'a engagé à entrer dans des détails dont la longueur sera justifiée par l'influence que ne peut manquer d'exercer l'homme célèbre qui semble projeter une révolution à cet égard.

d'où

$$\Delta^2 u = \frac{d\Delta u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Delta u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

on trouvera de même

$$\Delta^3 u = \frac{d\Delta^2 u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta^2 u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$\Delta^4 u = \frac{d\Delta^3 u}{dx}\frac{h}{1} + \text{etc.}$$

etc.

En effectuant les développemens successifs indiqués ci-dessus, il viendra

$$\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2}\frac{h^2}{1} + \frac{d^3 u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4 u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{d^3 u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4 u}{dx^4}\frac{h^4}{2.2} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{d^4 u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.} + \text{etc.}$$

Il seroit facile de trouver la loi que suivent les termes de cette expression, mais nous y parviendrons d'une manière plus générale, au moyen de l'analogie qui existe entre la différentiation des quantités et leur élévation aux puissances, analogie dont nous avons déjà fait remarquer quelques traits dans le n°. 125.

347. On a vu (24) que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et il suit de cette formule que

$$e^{\frac{du}{dx}h} = 1 + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.} + \frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$e^{\frac{du}{dx}h} - 1 = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2.} + \frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si maintenant on transporte les exposans des puissances de du à la caractéristique d, le second membre de l'équation précédente deviendra

$$\frac{du\,h}{dx\,1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

et sera la même chose que Δu; on aura donc

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1,$$

pourvu que dans le développement du second membre on transporte à la caractéristique d les exposans des puissances de du.

D'après ce résultat, Lagrange a remarqué le premier qu'on avoit en général $\Delta^n u = \left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^n$, en observant toujours de transporter à la caractéristique d les exposans des puissances de du; et voici comment Laplace a démontré cette proposition.

Il est évident par ce qui a été dit dans le n°. précédent, que, quelle que soit l'expression de $\Delta^n u$, on doit avoir

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n}h^n + A'\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1} + A''\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2} + \text{etc.}$$

A', A'', etc. désignant des coefficiens qui ne dépendent que de n. Cette équation devant subsister pour toutes les formes que peut prendre la fonction u, conviendra nécessairement au cas où $u = e^x$; mais alors

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^3u}{dx^3} = \text{etc.} = e^x$$

$\Delta u = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$, $\Delta^2 u = (e^h - 1)(e^{x+h} - e^x) = e^x(e^h - 1)^2$, $\Delta^3 u = e^x(e^h - 1)^3$ ..... $\Delta^n u = e^x(e^h - 1)^n$.

Substituant cette valeur de $\Delta^n u$, dans le premier membre de l'équation posée plus haut, et celles de $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. dans le second, il viendra

$$(e^h-1)^n = h^n + A'h^{n+1} + A''h^{n+2} + \text{etc.}$$

d'où il suit que les coefficiens A', A'', etc. doivent être les mêmes que ceux du développement de $(e^h-1)^n$, puisque l'accroissement h doit demeurer indéterminé. Il ne peut d'ailleurs exister aucune difficulté à l'égard des coefficiens différentiels de u, qui se déduisent tous des puissances de du par le changement indiqué dans les exposans.

La même relation entre les puissances et les différences se retrouve dans les fonctions d'un nombre quelconque de variables, et se prouvera d'une manière analogue:

$$\frac{du}{dx}h \qquad\qquad \frac{du}{dx}h$$

348. L'équation $\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1$ donne $e^{\frac{du}{dx}h} = 1 + \Delta u$, et si on prend les logarithmes de part et d'autre, il viendra

$$\frac{du}{dx}h = l(1+\Delta u),$$

équation qui sera vraie, si dans le développement de $l(1+\Delta u)$, on transporte à la caractéristique Δ, les exposans des puissances de Δu; on aura par ce moyen

$$\frac{du}{dx}h = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u + \text{etc. (28)}.$$

Au lieu de nous arrêter à démontrer ce cas particulier, nous prouverons qu'en général

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n = \{l(1+\Delta u)\}^n,$$

en changeant Δu^2, Δu^3, etc. en $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. Il est visible que la question revient à déterminer les coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ... etc. en fonction des différences successives de u, et que pour cela on a des équations de la forme

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.}$$

$$\Delta^{n+1} u = \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A' \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.}$$

$$\Delta^{n+2} u = \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.}$$

dans lesquelles les coefficiens différentiels ne montent qu'au premier degré; on peut donc faire

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \Delta^n u + B' \Delta^{n+1} u + B'' \Delta^{n+2} u + B''' \Delta^{n+3} u + \text{etc.}$$

On obtiendroit facilement la valeur des coefficiens inconnus B', B'', B''', etc. par l'élimination successive de

$$\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1}, \qquad \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2}, \text{ etc.}$$

mais puisque l'équation hypothétique doit avoir lieu, quel que soit u, elle subsistera encore lorsqu'on y fera $u = e^x$, ce qui donnera

$$\frac{d^i u}{dx^i} = e^x \qquad \text{et } \Delta^i u = e^x (e^h - 1)^i,$$

quelque valeur qu'ait le nombre entier i; et on trouvera par conséquent

$$h^n = (e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{etc.}$$

Pour mettre en évidence l'identité des deux membres de cette équation, il suffit d'observer que

$$h^n = \left\{ l(1 + e^h - 1) \right\}^n,$$

parce que le développement de $l(1+e^h-1)$, ordonné suivant les puissances de e^h-1, et qui est

$$e^h-1-\tfrac{1}{2}(e^h-1)^2+\tfrac{1}{3}(e^h-1)^3-\tfrac{1}{4}(e^h-1)^4+\text{etc.}$$

étant élevé à la puissance n, deviendra comparable à la série

$$(e^h-1)^n+B'(e^h-1)^{n+1}+B''(e^h-1)^{n+2}+\text{etc.}$$

dont les coefficiens numériques B', B'', etc. seront par conséquent déterminés. Si l'on écrit Δu, à la place de e^h-1, et $\frac{d^n u}{dx^n}h^n$ à celle de h^n, on aura l'équation $\frac{d^n u}{dx^n}h^n=\{l(1+\Delta u)\}^n$, posée précédemment.

En faisant pour abréger $e^h-1=\alpha$, et développant $(\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha^4+\text{etc.})^n$, suivant les puissances de α, par la méthode du n°. 45, on obtiendra les valeurs de B', B'', etc.

Application du Calcul des différences à l'interpolation des suites.

349. L'un des principaux usages du Calcul des différences a pour objet l'*interpolation des suites*; cette opération consiste à insérer entre les termes d'une suite donnée de nouveaux termes assujettis à la même loi que les premiers. Soient u_1, u_2, u_3, etc. les valeurs particulières que reçoit une fonction quelconque u, dépendante de la variable x, lorsqu'on y change successivement x en $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, etc. on aura ces deux suites correspondantes:

$$\begin{array}{llllll} x, & x+h, & x+2h, & x+3h, & \text{etc.} \\ u, & u_1, & u_2, & u_3, & \text{etc.} \end{array}$$

mais outre les valeurs ci-dessus, la fonction u en a une

infinité d'autres résultantes des valeurs de x, intermédiaires entre celles qui répondent à la suite proposée: déterminer ces nouvelles valeurs de u, sans connoître l'expression du terme général de la suite, ou la manière dont la fonction u est composée en x, et seulement par le secours des valeurs numériques des quantités u, u_1, u_2, u_3, etc. c'est là ce qu'on appelle *interpoler* la suite u, u_1, u_2, u_3, etc.

La question que nous nous proposons ici revient donc à trouver la valeur de u lorsque x se change en $x+h'$, h' désignant une quantité quelconque, en n'employant dans le résultat que les différences de la fonction u calculées dans l'hypothèse où x varie de la quantité h; or, on a, par le n°. 347,

$$\frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}x^i} h^i = \Delta^i u + A'\Delta^{i+1} u + A''\Delta^{i+2} u + A'''\Delta^{i+3} u + \text{etc.}$$

d'où il suit

$$\frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}x^i} h'^i = \frac{h'^i}{h^i}\left(\Delta^i u + A'\Delta^{i+1} u + A''\Delta^{i+2} u + \text{etc.}\right).$$

Si on tiroit successivement de cette équation les valeurs de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3}$, etc. pour les substituer dans la série

$$u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h'}{1} + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h'^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h'^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

qui exprime ce que devient u lorsque x devient $x+h'$, on auroit un résultat de la forme

$$u + \frac{h'}{h}\Delta u + \left(B'\frac{h'}{h} + B''\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2 u + \left(B'_1\frac{h'}{h} + B''_1\frac{h'^2}{h^2} + B'''_1\frac{h'^3}{h^3}\right)\Delta^3 u + \text{etc.}$$

B', B'', B'_1, B''_1, B'''_1, etc. étant, ainsi que A', A'', etc. des

coefficiens numériques indépendans de h ; et désignant par $\Delta' u$ l'accroissement que reçoit la fonction u dans le passage de x à $x+h'$, il viendroit

$$1+\Delta' u = 1+\frac{h'}{h}\Delta u+\left(B'\frac{h'}{h}+B''\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2 u+\text{etc.}$$

Cette équation devant avoir lieu, quel que soit u, subsistera encore dans le cas où $u=e^x$, et se changera alors en

$$e^{h'}=1+\frac{h'}{h}(e^h-1)+\left(B'\frac{h'}{h}+B''\frac{h'^2}{h^2}\right)(e^h-1)^2+\text{etc.}$$

équation dont on ramène, par le développement, le premier membre à la même forme que le second, en observant que $e^{h'}=[1+(e^h-1)]^{\frac{h'}{h}}$; et comme en remettant dans le second Δu, $\Delta^2 u$, etc. à la place des quantités e^h-1, $(e^h-1)^2$, etc. on retombe sur le développement de $1+\Delta' u$, on doit en conclure que

$$1+\Delta' u=(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}},$$

pourvu qu'on se rappelle de transporter à la caractéristique Δ, dans le second membre, les exposans des puissances de Δu.

Ce résultat, aussi simple qu'élégant, a été présenté par Lagrange comme une conséquence de l'analogie que les différences ont avec les puissances. En effet, il suit de l'équation $e^{\frac{du}{dx}h}=1+\Delta u$, (348), que $e^{\frac{du}{dx}h'}=(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, ce qui donne sur le champ, $1+\Delta' u=(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, puisque $e^{\frac{du}{dx}h'}=1+\Delta u$.

En développant le second membre de l'équation que nous venons d'obtenir, ainsi qu'il a été prescrit, on trouvera

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

Si l'on fait $h=1$, on aura

$$\Delta' u = \frac{h'}{1}\Delta u + \frac{h'(h'-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

série qui n'est autre que celle du n°. 343, dans laquelle on auroit mis h' à la place de n.

350. Venons maintenant à des applications. Si l'on désigne par u' ce que devient u, lorsque x se change en $x+h'$, on aura $u'=u+\Delta' u$; et il est visible que pour tirer parti de l'expression de $\Delta' u$, il faut, ou qu'elle se termine, ou du moins qu'elle forme une série convergente. Le premier cas a lieu toutes les fois que la suite des différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. se termine elle-même, c'est-à-dire, lorsque l'on parvient à un ordre dont les différences sont constantes, ce qui rend nulles celles du suivant.

Soit d'abord la suite

3, 7, 19, 39, 67, etc.

correspondante aux indices

0, 1, 2, 3, 4, etc.

on a pour ce cas,

$u=3$, $x=0$, $h=1$, $\Delta u=4$, $\Delta^2 u=8$, $\Delta^3 u=0$;

l'expression de $\Delta' u$ se réduit à ses deux premiers termes, et l'on obtient par son moyen

$$\Delta' u = 4h' + 4h'(h' - 1) = 4h'^2 :$$

ainsi pour l'indice h', il viendra $u' = 3 + 4h'^2$. En prenant $h' = \frac{1}{2}$, par exemple, on trouveroit que le terme correspondant à cet indice est 28.

Proposons-nous encore la suite

1, 4, 2, 3, 9, 16, etc.

en prenant les indices comme à l'ordinaire, savoir:

0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.

et formant les différences, on trouvera

$h = 1, u = 1, \Delta u = 3, \Delta^2 u = -5, \Delta^3 u = 8, \Delta^4 u = -6, \Delta^5 u = 0,$

d'où on tirera

$$u' = 1 + 3\frac{h'}{1} - 5\frac{h'(h'-1)}{1.2} + 8\frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1.2.3} - 6\frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{1.2.3.4};$$

en réduisant cette expression, et l'ordonnant par rapport aux puissances de h', on aura

$$u' = \frac{12 + 116h' - 111h'^2 + 34h'^3 - 3h'^4}{12}.$$

Il est important de remarquer que l'expression de u', dans cet exemple et dans le précédent, étant rigoureuse, et convenant à toutes les valeurs de h', offre le terme général de la suite proposée, puisqu'elle en donne tous les termes particuliers en y faisant successivement $h' = 0$, $h' = 1$, $h' = 2$, etc. et quoique nous n'ayons rapporté que les premiers termes de cette suite, on peut la continuer aussi loin qu'on voudra, suivant la loi observée dans ces termes. Il en sera tou-

jours de même quand la série proposée aura des différences constantes, parce qu'elle ne peut résulter alors que des valeurs successives d'une fonction algébrique rationnelle et entière.

351. Les cas auxquels on applique le plus fréquemment la formule

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u \text{ etc.}$$

sont ceux dans lesquels les différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. vont en décroissant, parce qu'alors elle est convergente. En voici un exemple tiré des tables de logarithmes. Je suppose qu'on veuille obtenir le logarithme ordinaire de 3,1415926536, par le moyen d'une table contenant les logarithmes depuis 1 jusqu'à 1000, avec dix décimales; on regardera alors les logarithmes contenus dans la table comme des valeurs particulières de la fonction u, les nombres comme les indices auxquels répondent ces valeurs; et on formera le tableau suivant

u =0,4969296481	13809057			
u_1=0,4983105538	13765288	—43769		
u_2=0,4996870826	13721796	—43492	+277	
u_3=0,5010592622	13678578	—43218	+274	−3
u_4=0,5024271200				

dont la première colonne renferme les logarithmes de

3,14, 3,15, 3,16, 3,17, 3,18;

la seconde, leurs différences premières; la troisième, leurs différences secondes; la quatrième, leurs différences troisièmes, et la cinquième leurs différences quatrièmes qui se réduisent à trois unités du dernier ordre:

ordre : on aura par ce moyen

$$\Delta u = +0{,}001389057, \quad \Delta^2 u = -0{,}000043769,$$
$$\Delta^3 u = +0{,}000000277, \quad \Delta^4 u = -0{,}000000003;$$

et comme $h = 0{,}01$, $h' = 0{,}015926536$,

on obtiendra

$$\frac{h'}{h} = 0{,}15926536, \quad \frac{h'-h}{2h} = \frac{h'}{2h} - \tfrac{1}{2} = -0{,}42036732$$

$$\frac{h'-2h}{3h} = \frac{h'}{3h} - \tfrac{2}{3} = -0{,}61357821,$$

$$\frac{h'-3h}{4h} = \frac{h'}{4h} - \tfrac{3}{4} = -0{,}71018366:$$

avec ces valeurs il sera très-facile de mettre en nombres la formule

$$u' = u + \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)(h'-3h)}{h.2h.3h.4h}\Delta^4 u,$$

qui donnera $u' = 0{,}497149872\mathfrak{6}$.

Il existe des moyens plus faciles pour obtenir les logarithmes des nombres exprimés par beaucoup de chiffres, mais le précédent est très-propre à servir d'exemple pour la méthode d'interpolation. On doit reconnoître déjà que cette méthode s'étend à beaucoup d'autres cas; elle est sur-tout d'un très-grand usage dans les calculs astronomiques.

352. Si on développe l'expression générale de u', suivant les puissances de h', le résultat sera de la forme

$$u' = u + Ah' + Bh'^2 + Ch'^3 + \text{etc.}$$

et le dernier exposant de h' marquera l'ordre de la plus plus haute différence à laquelle on ait eu égard. Il est

visible qu'en considérant h' comme une abscisse, et u' comme l'ordonnée correspondante, l'équation ci-dessus appartiendra à une courbe du genre parabolique ; et puisqu'on doit avoir successivement

$$u'=u,\quad u'=u_1,\quad u'=u_2,\quad u'=u_3, \text{ etc.}$$

lorsqu'on fait

$$h'=0,\quad h'=h,\quad h'=2h,\quad h'=3h, \text{ etc.}$$

il s'ensuit que cette courbe doit passer par autant de points donnés, qu'on a de valeurs particulières de u. La méthode d'interpolation que nous venons d'exposer revient donc à faire passer par un nombre déterminé de points donnés, une courbe parabolique, sur laquelle on suppose ensuite que sont placés les points qui correspondent aux valeurs intermédiaires que l'on cherche. C'est Newton qui, le premier, a résolu cette question, et voici comment :

Pour une valeur quelconque x' de la variable x, il fait

$$u'=\alpha+\beta x'+\gamma x'^2+\delta x'^3+\text{etc.}$$

ce qui donne pour la suite des valeurs particulières x, x_1, x_2, x_3, etc. ces équations

$$\begin{aligned}
u &= \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}\\
u_1 &= \alpha+\beta x_1+\gamma x^2{}_1+\delta x^3{}_1+\text{etc.}\\
u_2 &= \alpha+\beta x_2+\gamma x^2{}_2+\delta x^3{}_2+\text{etc.}\\
u_3 &= \alpha+\beta x_3+\gamma x^2{}_3+\delta x^3{}_3+\text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

dont le nombre doit être égal à celui des coefficiens indéterminés α, β, γ, etc. En retranchant successivement la première de la seconde, celle-ci de la troisième, etc. on parvient à des résultats respectivement

divisibles par x_1-x, x_2-x_1, x_3-x_2, etc. et d'où l'on tire

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\beta+\gamma(x_1+x)+\delta(x^2_1+x_1x+x^2)+\text{etc.}$$
$$\frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=\beta+\gamma(x_2+x_1)+\delta(x^2_2+x_2x_1+x^2_1)+\text{etc.}$$
$$\frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=\beta+\gamma(x_3+x_2)+\delta(x^2_3+x_3x_2+x^2_2)+\text{etc.}$$
etc.

posant pour abréger

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=U,\quad \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=U_1,\text{ etc.}$$

on aura les équations

$$U=\beta+\gamma(x_1+x)+\delta(x^2_1+x_1x+x^2)+\text{etc}$$
$$U_1=\beta+\gamma(x_2+x_1)+\delta(x^2_2+x_2x_1+x^2_1)+\text{etc.}$$
$$U_2=\beta+\gamma(x_3+x_2)+\delta(x^2_3+x_3x_2+x^2_2)+\text{etc.}$$
etc.

retranchant encore U de U_1, U_1 de U_2 et ainsi de suite, et désignant par U', U'_1, etc. les quantités

$$\frac{U_1-U}{x_2-x},\quad \frac{U_2-U_1}{x_3-x_1}\text{ etc.}$$

on trouvera

$$U'=\gamma+\delta(x_2+x_1+x)+\text{etc.}$$
$$U'_1=\gamma+\delta(x_3+x_2+x_1)+\text{etc.}$$

d'où on tirera

$$U'_1-U'=\delta(x_3-x)+\text{etc.}$$

Maintenant si l'on fait

$$\frac{U'_1-U'}{x_3-x}=U'',$$

on aura $U''=\delta+$ etc. et si pour fixer les idées on ne

suppose que quatre termes à l'expression de u, l'opération sera terminée à l'équation ci-dessus ; prenant la valeur qu'elle donne pour δ, et remontant à celles de γ, β, α, par le moyen des expressions U', U et u, il viendra

$$\delta = U''$$
$$\gamma = U' - U''(x_2 + x_1 + x)$$
$$\beta = U - U'(x_1 + x) + U''(x_2 x_1 + x_2 x + x_1 x)$$
$$\alpha = u - Ux + U' x_1 x - U'' x_2 x_1 x.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de u', on aura

$$u' = u + U(x' - x) + U'[x'^2 - (x_1 + x)x' + x_1 x] + U''[x'^3 - (x_2 + x_1 + x)x'^2 + (x_2 x_1 + x_2 x + x_1 x)x' - x x_1 x_2]$$

Il est facile de voir que les coefficiens de U, U' et U'', sont décomposables en facteurs simples, et que l'on peut mettre u sous cette forme

$$u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_1) + U''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2).$$

En poursuivant d'après cette méthode, on obtiendroit une formule analogue à la précédente ; et quel que fût le nombre des valeurs $x, x_1, x_2, \ldots$ de l'abscisse x', on auroit en général

$$u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_1) + U''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2) + U'''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2)(x' - x_3) + \text{etc.}$$

en faisant

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = U, \quad \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = U_1, \quad \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} = U_2, \quad \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3} = U_3, \text{ etc.}$$

$$\frac{U_1 - U}{x_2 - x} = U', \quad \frac{U_2 - U_1}{x_3 - x_1} = U'_1, \quad \frac{U_3 - U_2}{x_4 - x_2} = U'_2, \text{ etc.}$$

$$\frac{U'_1 - U'}{x_3 - x} = U'', \quad \frac{U'_2 - U'_1}{x_4 - x_1} = U''_1, \text{ etc.}$$

$$\frac{U''_1 - U''}{x_4 - x} = U''', \text{ etc.}$$

etc.

Quand les ordonnées u, u_1, u_2, u_3, etc. sont équidistantes, on a

$$x_1 - x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2, \text{ etc.}$$

d'où il suit évidemment

$$x_1 = x+h, \quad x_2 = x+2h, \quad x_3 = x+3h, \text{ etc.}$$

$$U = \frac{1}{h}\Delta u, \; U_1 = \frac{1}{h}\Delta u_1, \; U_2 = \frac{1}{h}\Delta u_2, \; U_3 = \frac{1}{h}\Delta u_3, \text{ etc.}$$

$$U' = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 u, U'_1 = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 u_1, U'_2 = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 u_2, \text{ etc.}$$

$$U'' = \frac{1}{3h^3}\Delta^3 u, U''_1 = \frac{1}{3h^3}\Delta^3 u_1, \text{ etc.}$$

$$U^{n} = \frac{1}{4h^4}\Delta^4 u, \text{ etc.}$$

etc.

faisant $x' = x+h'$, il en résultera

$x' - x = h'$, $x' - x_1 = h' - h$, $x' - x_2 = h' - 2h$,

$x' - x_3 = h' - 3h$, etc.

et l'on voit ainsi que l'expression précédente de u', qui devient alors

$$u' = u + \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

rentre dans celle que nous avons trouvée, n°. 349, par une voie bien différente.

353. Lagrange a présenté l'expression de u' sous une forme nouvelle, en observant que puisque les équations

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$
$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x^2_1 + \delta x^3_1 + \text{etc.}$$
$$u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x^2_2 + \delta x^3_2 + \text{etc.}$$
etc.

sont du premier degré seulement, par rapport à chacune des quantités α, β, γ, etc. u, u_1, u_2, etc. et que u' doit être exprimé en x', de manière qu'en y faisant successivement $x'=x$, $x'=x_1$, $x'=x_2$, etc. il vienne $u'=u$, $u'=u_1$, $u'=u_2$, on peut écrire

$$u'=Xu+X_1u_1+X_2u_2+\text{etc.}$$

pourvu que X, X_1, X_2 etc. soient des fonctions telles que par la supposition de $x'=x$, on ait en même temps

$$X=1,\quad X_1=0,\quad X_2=0,\text{ etc.}$$

que par celle de $x'=x_1$, on ait

$$X=0,\quad X_1=1,\quad X_2=0,$$

que par celle de $x'=x$, on ait

$$X=0,\quad X_1=0,\quad X_2=1,\text{ etc.}$$

et ainsi de suite, conditions qui seront remplies si l'on prend

$$X=\frac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots.}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots.}$$

$$X_1=\frac{(x'-x)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots.}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots.}$$

$$X_2=\frac{(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_3)\ldots.}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots.}$$

etc.

La loi qu'il faut observer dans la formation de ces quantités est on ne peut pas plus simple; leur numérateur contient, ainsi que leur dénominateur, autant de facteurs qu'il y a de quantités x, x_1, x_2, etc. moins une; et si l'on y fait les hypothèses indiquées ci-dessus, non-seulement on se convaincra qu'elles satisfont à la question proposée, mais on verra de plus com-

ment il a été possible de prévoir qu'elles y satisferoient. On a donc cette nouvelle formule d'interpolation

$$u' = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots} u \\ + \dfrac{(x'-x)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots} u_1 \\ + \dfrac{(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_3)\ldots}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots} u_2 + \text{etc.} \end{array} \right.$$

très-commode dans la pratique, parce qu'on en peut calculer chaque terme par le moyen des logarithmes. Il ne seroit pas difficile de la ramener à celle du n°. précédent, et même à celle du n°. 349; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

354. Quoique le but de l'interpolation soit en général de déterminer des valeurs intermédiaires entre des quantités observées, sans connoître la loi qui lie ces quantités à leurs indices, ou à la variable dont elles dépendent, on l'employe aussi lorsque cette loi est connue et exprimée analytiquement, mais que les calculs nécessaires pour évaluer en nombres les formules qui en résultent sont très-compliqués. On se contente alors de déterminer par ces formules, de distance en distance, des résultats rigoureux, entre lesquels on interpole ensuite les valeurs intermédiaires qui doivent compléter la série qu'on se propose de former. Dans ce cas on ne prend point les différences successives des valeurs calculées par les formes résultantes de la loi, mais on déduit ces différences de l'expression analytique de cette loi; on en pousse la suite jusqu'à ce qu'il s'en trouve d'assez petites pour qu'on puisse les négliger, et par le moyen des précédentes on

calcule les valeurs successives de la fonction u. Quoique la formation de ces valeurs soit facile à déduire des relations obtenues dans le n°. 343, néanmoins pour plus de clarté, j'en rapporterai ici le tableau, en tenant compte des différences troisièmes que je supposerai constantes ce qui donnera

$u=u$		
$u_1=u+\Delta u$		
$u_2=u_1+\Delta u_1$	$\Delta u_1=\Delta u+\Delta^2 u$	
$u_3=u_2+\Delta u_2$	$\Delta u_2=\Delta u_1+\Delta^2 u_1$	$\Delta^2 u_1=\Delta^2 u+\Delta^3 u$
$u_4=u_3+\Delta u_3$	$\Delta u_3=\Delta u_2+\Delta^2 u_2$	$\Delta^2 u_2=\Delta^2 u_1+\Delta^3 u$
etc.	etc.	etc.

On voit par ce tableau qu'il faut calculer d'abord sur chaque ligne, la différence placée dans la colonne la plus à droite. Pour obtenir u_4, par exemple, on forme $\Delta^2 u_2$, en ajoutant à la valeur de $\Delta^2 u_1$ celle de $\Delta^3 u$, qui est regardée comme constante; ajoutant ensuite $\Delta^2 u_2$ avec Δu_2, qu'on suppose déjà connue, on parviendra à Δu_3 qu'il faudra joindre avec u_3 pour avoir u_4.

Pour éclaircir cet usage du Calcul des différences, nous allons considérer les fonctions logarithmiques, qui sont celles dont les tables servent le plus fréquemment.

355. Soit $u=\mathrm{l}.x$; on aura, par la formule du n°. 29,

$$\Delta u = M\left\{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\text{etc.}\right\}$$

$$\Delta^2 u = -M\left\{\frac{h^2}{x^2}-\frac{2h^3}{x^3}+\text{etc.}\right\}$$

$$\Delta^3 u = M\left\{\frac{2h^3}{x^3}-\text{etc.}\right\}$$

etc.

On poussera ces suites, selon la grandeur du nombre x, jusqu'à ce que la dernière différence soit assez petite pour être négligée sans erreur sensible. Si l'on avoit, par exemple $x = 10000$, et $h = 1$, on trouveroit pour les logarithmes ordinaires,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \quad 0{,}00004\ 34272\ 76863 \\ \Delta^2 u &= -0{,}0000.\ 00043\ 42077 \\ \Delta^3 u &= \quad 0{,}00000\ 00000\ 00867, \end{aligned}$$

et il est évident que si l'on ne vouloit avoir les derniers résultats qu'avec dix chiffres seulement, on pourroit, sans craindre d'erreur sensible, négliger $\Delta^4 u$, ou regarder $\Delta^3 u$ comme constante.

Cela posé, on aura le logarithme de 10001, en ajoutant à celui de 10000, qui est 4,00000 00000 00000 la valeur de Δu rapportée ci-dessus; pour passer à celui de 10002, il faudra ajouter à celui de 10001 la quantité $\Delta u - \Delta^2 u$, puisque $\Delta^2 u$ est négatif; et si l'on représente cette quantité par Δu_1, le logarithme de 10003 s'obtiendra en augmentant celui de 10002 de la quantité $\Delta u_1 - \Delta^2 u + \Delta^3 u$. Faisant

$$\Delta u_1 - \Delta^2 u + \Delta^3 u = \Delta u_2, \quad -\Delta^2 u + \Delta^3 u = -\Delta^2 u_1,$$

la quantité $\Delta u_2 - \Delta^2 u_1 + \Delta^3 u$ sera ce qu'il faut ajouter au logarithme de 10003, pour avoir celui de 10004, et ainsi de suite. On peut former ainsi, par de simples additions, les logarithmes de tous les nombres entiers consécutifs à 10000, tant que la somme des différences qu'on néglige à chaque opération n'est pas assez considérable pour influer sur le dernier chiffre décimal auquel on veut borner l'exactitude de la table; et c'est ce qu'on reconnoît au moyen de quelques logarithmes calculés rigoureusement à des intervalles éloignés; car

lorsque par la suite des additions successives, on parvient à ces logarithmes, il faut que la méthode des différences les donne tels qu'ils ont été déduits *à priori*, au moins dans les dix premiers chiffres, si c'est à ce nombre que l'on veut s'arrêter. On iroit, par ce qui précède, jusqu'à 10100, sans trouver d'erreur sur la dixième décimale; parvenu à ce but, on calculeroit de nouveau *à priori* les différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, et on se serviroit de ces derniers résultats comme des précédens, pour obtenir les logarithmes des nombres entiers qui suivent 10100.

Du Calcul inverse des différences, par rapport aux fonctions d'une seule variable, données de forme.

356. Le Calcul inverse des différences est, à l'égard du Calcul direct, ce qu'est le Calcul intégral, par rapport au Calcul différentiel: il a pour objet de remonter des différences aux fonctions primitives. Nous nous occuperons d'abord du cas où les différences sont données explicitement par la variable indépendante, c'est-à-dire, où l'on a, pour déterminer la fonction u, une équation de cette forme $\Delta^n u = f(x, h)$, h étant la différence de la variable indépendante x.

Soit premièrement $n = 1$, ou $\Delta u = f(x, h)$. Cette équation ne fait connoître que le changement qu'éprouve la fonction u lorsque x devient $x+h$, et ne détermine pas la valeur absolue de cette fonction; mais si l'on suppose que quand $x = a$, on ait $u = b$, il sera facile de former, en partant de ces données, toutes les valeurs de u; car aux indices

$$a, \quad a+h, \quad a+2h, \quad a+3h, \text{ etc.}$$

correspondront ces valeurs de u :

$$b,\quad b+f(a,h),\quad b+f(a,h)+f(a+h,h),$$
$$b+f(a,h)+f(a+h,h)+f(a+2h,h),\text{ etc.}$$

L'introduction de la quantité arbitraire b a lieu ici comme dans le Calcul intégral, pour remplacer la constante que la différentiation fait disparoître (344); mais on voit que la signification de l'équation $\Delta u=f(x,h)$ repose dans le cas actuel sur la valeur assignée à l'accroissement h, et qu'on ne tire de cette équation qu'une suite de valeurs discontinues qui se succèdent d'après une loi donnée.

Si l'on avoit $\Delta^2 u=f(x,h)$, on ne pourroit tirer parti de cette équation, qu'en se donnant une première valeur de u avec celle de Δu qui lui correspond, ou deux valeurs consécutives de u. En effet, si, lorsque $x=a$, on posoit $u=b$, et $\Delta u=c$, on auroit, par le tableau du n°. 354, pour les indices

$$a,\quad a+h,\quad a+2h,\quad a+3h,\quad \text{etc.}$$

cette suite de valeurs

$$b,\quad b+c,\quad b+2c+f(a,h),\quad b+3c+2f(a,h)+f(a+h,h),\quad \text{etc.}$$

Les différences de l'équation $\Delta^2 u=f(x,h)$ donnant successivement $\Delta^3 u$, $\Delta^4 u$, etc. on peut aussi s'élever immédiatement à u_n, par la formule

$$u_n=u+n\Delta u+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u\ldots+\Delta^n u,$$

dans laquelle on voit évidemment que les deux premiers termes u et $n\Delta u$ demeurent arbitraires. Il est facile maintenant d'étendre ces considérations à tel ordre qu'on voudra.

357. Les valeurs successives de u, données par

l'équation $\Delta u = f(x, h)$; n'étant autre chose que les sommes consécutives des termes de la série

$f(a, h)$, $f(a+h, h)$, $f(a+2h, h)$, ... $f(a+nh, h)$,

correspondans aux indices

a, $a+h$, $a+2h$, ... $a+nh$,

augmentées de la quantité arbitraire b, il s'ensuit que si l'on regarde $a+nh$ comme représentant la valeur indéterminée de x, l'expression générale de la somme des termes de la même série, pris depuis le commencement jusqu'au terme correspondant à ce dernier indice, inclusivement, sera $u+f(a+nh, h)-b$, ou $u+f(x, h)-b$, ou enfin $u+\Delta u-b$. Pour s'en convaincre, il suffit de former la valeur de u_n, qui répond à l'indice $a+nh$, et dont le développement est

$$b+f(a, h)+f(a+h, h)+f(a+2h, h)\ldots+f(a+(n-1)h, h).$$

On peut déduire immédiatement ce résultat des formules générales du n°. 343, en faisant la somme des équations (1), qui donnera

$$u_n - u = \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots\ldots + \Delta u_{n-1},$$

et par conséquent

$$u_n + \Delta u_n - u = \Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots\ldots + \Delta u_{n-1} + \Delta u_n,$$

ou comme ci-dessus,

$$u+\Delta u-b = f(a, h)+f(a+h, h)\ldots+f(a+nh, h),$$

en changeant u_n en u, u en b, et mettant pour Δu, Δu_1, etc. leurs expressions relatives.

On voit par ce qui précède, que la recherche des fonctions primitives, par le moyen de leurs différences premières, revient à la sommation des suites, et que l'une de ces opérations conduit à l'autre. En effet, si l'on désigne par S_n l'expression générale de la somme des

termes de la suite

$$\Delta u, \quad \Delta u_1, \quad \Delta u_2, \ldots . \Delta u_{n-1}, \quad \Delta u_n,$$

on aura

$$S_n = u_n + \Delta u_n - u \text{ et } u_n = S_n - \Delta u_n + u,$$

équation dans lesquelles u_n est la fonction primitive dont la différence première est exprimée par le terme général Δu_n de la suite proposée, et u représente la constante arbitraire. Par la première, on obtiendra la somme de la suite proposée, lorsqu'on pourra trouver la fonction primitive correspondante à son terme général; et la seconde donnera cette fonction primitive dans tous les cas où l'on connoîtra *à priori* le terme général et la somme.

Pour indiquer le passage d'une différence à la fonction primitive dont elle tire son origine, on se sert le plus communément du signe Σ; ainsi, lorsque $\Delta u = f(x, h)$, on a $u = \Sigma f(x, h) + const.$ D'après cette notation et les équations précédentes, il viendra pour la série dont le terme général est $f(x, h)$,

$$Sf(x, h) = \Sigma f(x, h) + f(x, h) - const.$$
$$\Sigma f(x, h) = Sf(x, h) - f(x, h) + const.$$

en changeant, par analogie, S_n en $Sf(x, h)$.

On donne aussi le nom d'*intégrale* aux fonctions primitives: u est l'intégrale de Δu, $\Sigma f(x, h)$ est celle de $f(x, h)$. Cette dénomination se présente naturellement lorsqu'on regarde le Calcul différentiel comme un cas particulier du Calcul des différences. L'expression générale de la somme d'un nombre quelconque de termes de la suite proposée, ou $Sf(x, h)$, s'appelle *terme sommatoire;* et les équations rapportées ci-dessus, donnent la relation entre le terme général, son intégrale première et le terme sommatoire.

358. Les règles pour l'intégration des différences sont en très-petit nombre, et malheureusement les cas où l'on peut s'en servir avec succès sont très-bornés. Il suit de la formation des différences, 1°. que

$$\Delta(X+Y-Z)=\Delta X+\Delta Y-\Delta Z,$$

et en remontant aux fonctions primitives, on a

$$\Sigma(\Delta X+\Delta Y-\Delta Z)=\Sigma\Delta X+\Sigma\Delta Y-\Sigma\Delta Z,$$

ce qui ramène l'intégration des différences polynomes à celle des monomes;

2°. Que $\Delta.aX=a\Delta X$, d'où $aX=\Sigma.a\Delta X=a\Sigma\Delta X$, ce qui prouve qu'on peut à volonté faire sortir du signe Σ, ou introduire sous ce signe, un facteur constant.

3°. Lorsque $u=x^{m+1}$ et que m est nombre entier, il vient

$$\Delta u=\frac{(m+1)}{1}x^m h+\frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}h^2+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^3$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}x^{m-3}h^4\ldots+h^{m+1}x^0.$$

En intégrant terme à terme chaque membre de cette équation, remettant dans le premier x^{m+1}, au lieu de u, et passant hors du signe Σ les facteurs constans, on obtiendra

$$x^{m+1}=\frac{m+1}{1}h\Sigma x^m+\frac{(m+1)m}{1.2}h^2\Sigma x^{m-1}$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{m-2}\ldots+h^{m+1}\Sigma x^0.$$

Cette équation feroit connoître l'intégrale Σx^m, si l'on avoit Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, $\ldots\Sigma x^0$, puisqu'on en tireroit

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)h}-$$
$$\left\{\frac{m}{1.2}h\Sigma x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2.3}h^2\Sigma x^{m-2}\ldots+\frac{1}{m+1}h^m\Sigma x^0.\right\}$$

Si l'on écrit successivement dans cette dernière $m-1$, $m-2$, $m-3$, etc. pour m, on formera des expressions de Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, Σx^{m-3}, etc. qui ne dépendront que des intégrales des puissances de x qui leur sont respectivement inférieures. On peut aussi former ces valeurs en remontant; et si l'on prend d'abord $m=0$, il vient $\Sigma x^0=\frac{x}{h}$, parce que la formule générale ne doit renfermer qu'un nombre m de termes affectés du signe Σ. Cette conclusion se vérifie d'ailleurs *à priori*, soit en observant que de $u=x$, il résulte $\Delta x=h.x^0$, $x=h\Sigma x^0$, et par conséquent $\Sigma x^0=\frac{x}{h}$; soit en prenant la différence de la fonction primitive $\frac{x}{h}$, pour laquelle on trouve

$$\frac{x+h}{h}-\frac{x}{h}=1=x^0.$$

Faisant ensuite $m=1$, $m=2$, $m=3$, etc. et substituant successivement pour Σx^0, Σx^1, Σx^2, etc. les valeurs auxquelles on parviendra, on formera cette table:

$$\Sigma x^0=\frac{x}{h}$$

$$\Sigma x^1=\frac{1}{2}\frac{x^2}{h}-\frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2=\frac{1}{3}\frac{x^3}{h}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.3}xh$$

$$\Sigma x^3=\frac{1}{4}\frac{x^4}{h}-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2.2}x^2h$$

$$\Sigma x^4=\frac{1}{5}\frac{x^5}{h}-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3h-\frac{1}{5.6}xh^3$$

$$\Sigma x^5=\frac{1}{6}\frac{x^6}{h}-\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{2.6}x^4h-\frac{1}{2.6}x^2h^2$$

etc.

Au lieu de pousser plus loin cette induction, supposons qu'on ait en général

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + Dx^{m-2} + \text{etc.}$$

nous aurons, en prenant la différence première de chaque membre,

$$x^m = A\frac{(m+1)}{1}x^m h$$
$$+ A\frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}h^2 + A\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^3 + \text{etc.}$$
$$+ B\frac{m}{1}x^{m-1}h + B\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \text{etc.}$$
$$+ C\frac{(m-1)}{1}x^{m-2}h + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

et comparant entr'eux les termes affectés d'une même puissance de x, nous obtiendrons entre les coefficiens A, B, C, D, etc. les relations suivantes

$$A = \frac{1}{(m+1)h}$$
$$B = -A\frac{(m+1)h}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$C = -A\frac{(m+1)mh^2}{2.3} - B\frac{mh}{2}$$
$$D = -A\frac{(m+1)m(m-1)h^3}{2.3.4} - B\frac{m(m-1)h^2}{2.3} - C\frac{(m-1)}{2}h$$
etc.

avec lesquelles on déduira facilement les uns des autres les coefficiens de l'expression de Σx^m, quel que soit l'exposant de la puissance m. En calculant immédiatement

ment les douze premiers termes, on trouvera

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}\frac{mh}{2.3}x^{m-1} - \frac{1}{6}\frac{m(m-1)(m-2)h^3}{2.3.4.5}x^{m-3}$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5}{2.3.4.5.6.7}x^{m-5}$$
$$- \frac{3}{10}\frac{m(m-1)\ldots(m-6)h^7}{2.3\ldots\ldots8.9}x^{m-7}$$
$$+ \frac{5}{6}\frac{m(m-1)\ldots(m-8)h^9}{2.3\ldots\ldots10.11}x^{m-9}$$
$$- \frac{691}{210}\frac{m(m-1)\ldots(m-10)h^{11}}{2.3\ldots\ldots12.13}x^{m-11}$$
$$+ \frac{35}{2}\frac{m(m-1)\ldots(m-12)h^{13}}{2.3\ldots\ldots14.15}x^{m-13}$$
$$- \frac{3617}{30}\frac{m(m-1)\ldots(m-14)h^{15}}{2.3\ldots\ldots16.17}x^{m-15}$$
$$+ \frac{43867}{42}\frac{m(m-1)\ldots(m-16)h^{17}}{2.3\ldots\ldots18.19}x^{m-17}$$
$$- \frac{1222277}{110}\frac{m(m-1)\ldots(m-18)h^{19}}{2.3\ldots\ldots20.21}x^{m-19}$$
$$\text{etc.} \qquad + const.$$

formule dans laquelle les coefficiens exprimés en nombres méritent attention, parce qu'ils reviennent souvent dans la Théorie des suites.

Nous observerons, avant de finir cet article, que si l'on multiplie Σx^m par h, et qu'on passe cet accroissement sous le signe Σ, on aura cette équation

$$\Sigma x^m h = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}x^m h + \frac{1}{2}\frac{mh^2}{2.3}x^{m-1} - \text{etc.} + const.$$

dont le second membre a pour limite $\frac{x^{m-1}}{m+1} + const.$

lorsque h s'évanouit, cas auquel $\Sigma x^m h$ se change en $\int x^m dx$, d'après ce qu'on a vu dans le n°. 209.

359. Ce qui précède fournit le moyen d'intégrer toutes les fonctions algébriques, rationnelles et entières, dans le cas où la variable indépendante reçoit un accroissement constant. Prenons pour exemple la fonction

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D;$$

nous aurons

$$\Sigma(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=A\Sigma x^3+B\Sigma x^2+C\Sigma x+D\Sigma x^0,$$

et mettant pour Σx^3, Σx^2, Σx et Σx^0, leurs valeurs, il viendra

$$\Sigma(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=$$
$$\frac{A}{4h}x^4-\frac{3Ah-2B}{6h}x^3+\frac{Ah^2-2Bh+2C}{4h}x^2$$
$$+\frac{Bh^2-3Ch+6D}{6h}x+\text{const.}$$

360. Il existe un genre de fonctions rationnelles qui s'intégrent avec la plus grande facilité : ce sont les produits de la forme

$$u=(x+a)(x+a+h)(x+a+2h)\ldots.(x+a+mh);$$

en effet, si l'on en prend la différence, on obtiendra

$$\Delta u=\begin{cases}(x+a+h)(x+a+2h)(x+a+3h)\ldots(x+a+(m+1)h)\\ -(x+a)(x+a+h\ )(x+a+2h)\ldots(x+a+mh)\end{cases}$$
$$=(x+a+h)(x+a+2h)\ldots.(x+a+mh)(m+1)h,$$

et comme

$$\Sigma\frac{\Delta u}{(m+1)h}=\frac{\Sigma\Delta u}{(m+1)h}=\frac{u}{(m+1)h},$$

on aura

$$\Sigma\{(x+a+h)(x+a+2h)\ldots(x+a+mh)\}=$$
$$\frac{(x+a)(x+a+h)(x+a+2h)\ldots.(x+a+mh)}{(m+1)h}+\text{const.}$$

Si l'on écrit dans ce résultat $x-h$, au lieu de x, et $m+1$, au lieu de m, on aura

$$\Sigma\{(x+a)(x+a+h)(x+a+2h)\ldots.(x+a+mh)\} = \frac{(x+a-h)(x+a)(x+a+h)\ldots.(x+a+mh)}{(m+2)h} + const.$$

On donne à ce résultat une forme plus simple et qui paroît d'abord plus générale, en représentant la fonction u par $XX_1X_2\ldots.X_m$, et supposant que les différences premières des quantités X, X_1, X_2, $\ldots\ldots X_m$, soient constantes. Par cette notation on trouve

$$\Delta u = u_1 - u = X_1X_2X_3\ldots.X_{m+1} - XX_1X_2\ldots X_m$$
$$= X_1X_2X_3\ldots X_m(X_{m+1}-X)$$
$$= X_1X_2X_3\ldots.X_m \times (m+1)\Delta X$$

d'où il est facile de conclure, comme ci-dessus,

$$\Sigma X_1X_2X_3\ldots.X_m = \frac{XX_1X_2\ldots X_m}{(m+1)\Delta X} + const.$$

et $$\Sigma X X_1X_2\ldots.X_m = \frac{X_{-1}XX_1\ldots X_m}{(m+2)\Delta X};$$

en mettant $m+1$ pour m, et diminuant ensuite de l'unité chaque indice.

On intègre aussi la fraction $\frac{1}{XX_1X_2\ldots.X_m}$, parce qu'en la différentiant, on trouve

$$\Delta\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m} = \frac{1}{X_1X_2X_3\ldots X_{m+1}} - \frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m}$$
$$= \frac{X-X_{m+1}}{XX_1X_2X_3\ldots X_{m+1}} = -\frac{(m+1)\Delta X}{XX_1X_2X_3\ldots X_{m+1}}$$

ce qui donne

$$\Sigma\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m+1}} = -\frac{1}{(m+1)\Delta X}\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m} + const.$$

et changeant $m+1$ en m, on obtient

$$\Sigma \frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m} = -\frac{1}{m\Delta X}\,\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m-1}}.$$

361. Les termes généraux des suites de *nombres figurés* étant respectivement

$$n, \quad \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}, \text{ etc.}$$

on trouve par les formules ci-dessus, en changeant x en n, et faisant $h=1$,

$$\Sigma n = \frac{(n-1)n}{2} + const.$$

$$\Sigma \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2.3} + const.$$

$$\Sigma \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2.3.4} + const.$$

etc.

expressions qui donneront la somme des séries proposées, ainsi qu'on le verra plus bas.

362. Il est à propos d'observer que l'intégration des fonctions de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.},$$

peut s'effectuer par les formules ci-dessus, en les transformant en produits de facteurs dont les différences soient constantes. Pour le faire voir, je choisis cet exemple très-simple : x^3, et je fais

$$x^3 = (x+h)(x+2h)(x+3h) + A(x+h)(x+2h) + B(x+h) + C,$$

en supposant que h désigne l'accroissement de x. Si l'on

développe, et qu'on ordonne suivant les puissances de x, on aura

$$x^3 = x^3 + 6hx^2 + 11h^2x + 6h^3 + Ax^2 + 3Ahx + 2Ah^2 + Bx + Bh + C;$$

et comparant entr'eux les termes affectés de la même puissance de x, on formera les équations

$$6h + A = 0,$$
$$11h^2 + 3Ah + B = 0,$$
$$6h^3 + 2Ah^2 + Bh + C = 0,$$

desquelles on tirera

$$A = -6h, \quad B = 7h^2, \quad C = -h^3,$$

et

$$x^3 = (x+h)(x+2h)(x+3h) - 6h(x+h)(x+2h) + 7h^2(x+h) - h^3,$$

ce qui donnera, en vertu du n°. précédent,

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4h}x(x+h)(x+2h)(x+3h) - 2x(x+h)(x+2h) + \frac{7}{2}hx(x+h) - h^3x + const.$$

Il est évident que cette méthode donne aussi le moyen d'intégrer le produit de facteurs équidifférens

$$(x+p)(x+p+q)(x+p+2q)\ldots.(x+p+(n-1)q),$$

quoique leur différence première ne soit pas égale à l'accroissement de x, que nous continuons à désigner par h, puisque ce produit étant développé devient de la forme $ax^n + bx^{n-1} + \text{etc.}$

362. A l'égard de l'intégration des fonctions transcendantes, nous nous bornerons aux fonctions exponentielles et circulaires. On a pour la première

$$\Delta . a^x = a^x (a^h - 1),$$

d'où il résulte

$$a^x = \Sigma a^x (a^h - 1) \quad \text{et} \quad \Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1}.$$

363. Pour les fonctions circulaires, on a 1°. l'équation $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}(A+B)$, qui donne

$$\Delta \cos x = \cos (x+h) - \cos x = -2 \sin \tfrac{1}{2} h \sin (x + \tfrac{1}{2} h),$$

d'où on tire

$$\sin (x + \tfrac{1}{2} h) = -\frac{\Delta \cos x}{2 \sin \frac{1}{2} h}, \text{ et } \sin x = -\frac{\Delta \cos (x - \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} h},$$

en écrivant $x - \frac{1}{2} h$, au lieu de x ; prenant ensuite l'intégrale de chaque membre de la dernière équation, on obtient

$$\Sigma \sin x = -\frac{\cos (x - \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} h} + const.$$

2°. L'équation $\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A-B) \cos \frac{1}{2}(A+B)$, donne

$$\Delta \sin x = \sin (x+h) - \sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2} h \cos (x + \tfrac{1}{2} h),$$

d'où il suit

$$\cos (x + \tfrac{1}{2} h) = \frac{\Delta \sin x}{2 \sin \frac{1}{2} h}, \quad \cos x = \frac{\Delta \sin (x - \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} h},$$

$$\Sigma \cos x = \frac{\sin (x - \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} h} + const.$$

3°. La conversion des puissances de sinus, de cosinus et de leurs produits, en fonction de sinus et de cosinus d'arcs multiples, ramenera aux deux formules

que nous venons de trouver, l'intégration de la fonction générale $\sin x^m \cos x^n$, lorsque les exposans m et n seront des nombres entiers positifs.

En effet, cette fonction sera changée en une suite de termes de la forme $A \sin qx$, ou $A \cos qx$, dont les intégrales se déduiront de celles de $A \sin x$ et $A \cos x$, en écrivant qx et qh, au lieu de x et de h, et il est facile de voir que l'on aura en général

$$\Sigma \sin(p+qx) = -\frac{\cos(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.$$

$$\Sigma \cos(p+qx) = \frac{\sin(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.$$

364. L'utilité dont est l'expression de Σu, pour la sommation des séries, a porté les Analystes à s'en occuper beaucoup, et ils sont parvenus à lui donner plusieurs formes très-élégantes. Euler la fit dépendre des coefficiens différentiels et de l'intégrale $\int u dx$. On arrive à ce résultat en partant de la formule

$$\Delta z = \frac{dzh}{dx\,1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

qui donne

$$z = \frac{h}{1}\Sigma\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\Sigma\frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.}$$

Si on fait $\frac{dz}{dx} = u$, il viendra $z = \int u\,dx$ et

$$\int u\,dx = h\Sigma u + \alpha h^2 \Sigma\frac{du}{dx} + \beta h^3 \Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \text{etc.}$$

en représentant par α, β, γ, etc. les coefficiens numériques; on tirera de là

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\,dx - \alpha h\Sigma\frac{du}{dx} - \beta h^2\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \text{etc.}$$

Si maintenant on prend les coefficiens différentiels de chaque membre, en observant que $\frac{\mathrm{d}.\Sigma u}{\mathrm{d}x} = \Sigma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, ce qu'il est fort aisé de vérifier, on obtiendra cette suite d'équations

$$\Sigma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h} u - \alpha h \Sigma \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - \beta h^2 \Sigma \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} - \text{etc.}$$

$$\Sigma \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{h} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \alpha h \Sigma \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} - \beta h^2 \Sigma \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}$$

$$\Sigma \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} = \frac{1}{h} \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - \alpha h \Sigma \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} - \beta h^2 \Sigma \frac{\mathrm{d}^5 u}{\mathrm{d}x^5} - \text{etc.}$$

etc.

on se servira de ces dernières pour éliminer successivement de la valeur de Σu les fonctions

$$\Sigma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad \Sigma \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}, \quad \Sigma \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3}, \text{etc.}$$

et il est aisé de voir que le résultat sera nécescairement de la forme

$$\Sigma u = \frac{1}{h} \int u \, \mathrm{d}x + A u + B h \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + C h^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.}$$

La détermination des coefficiens A, B, C, etc. s'opère ici comme dans le n°. 347, par la considération de la fonction particulière e^x, pour laquelle on trouve

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e - 1}, \quad \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x, \quad \frac{\mathrm{d}^m . e^x}{\mathrm{d}x^m} = e^x,$$

d'où il suit

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} + A + B h + C h^2 + \text{etc.}$$

ce qui montre que les coefficiens A, B, C, etc. ne sont autre chose que ceux qui multiplient les puissances de h

dans le développement de la fonction $\frac{1}{e^h-1}$, réduite en série ascendante par rapport à cette lettre.

365. On obtiendra de la même manière, et sans plus de difficulté, les intégrales $\Sigma\Sigma u$ ou $\Sigma^2 u$, $\Sigma\Sigma^2 u$ ou $\Sigma^3 u$, en général $\Sigma^m u$; car la formule

$$\Delta^m z = \frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m} h^m + \alpha \frac{\mathrm{d}^{m+1} z}{\mathrm{d}x^{m+1}} h^{m+1} + \beta \frac{\mathrm{d}^{m+2} z}{\mathrm{d}x^{m+2}} h^{m+2} + \text{etc.}$$

conduit à

$$z = h^m \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m} + \alpha h^{m+1} \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^{m+1} z}{\mathrm{d}x^{m+1}} + \beta h^{m+2} \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^{m+2} z}{\mathrm{d}x^{m+2}} + \text{etc.}$$

faisant ensuite $\frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m} = u$, on aura $z = \int^m u \,\mathrm{d}x^m$, et par conséquent

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m} \int^m u \,\mathrm{d}x^m - \alpha h \Sigma^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.}$$

prenant les coefficiens différentiels de chaque membre de cette dernière équation, on formera les suivantes;

$$\Sigma^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h^m} \int^{m-1} u \mathrm{d}x^{m-1} - \alpha h \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}$$

$$\Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{h^m} \int^{m-2} u \mathrm{d}x^{m-2} - \alpha h \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc.}$$

etc.

à l'aide desquelles on chassera $\Sigma^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$, etc. de l'expression de $\Sigma^m u$. L'équation finale pourra être représentée par

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m} \int^m u \,\mathrm{d}x^m + \frac{A}{h^{m-1}} \int^{m-1} u \,\mathrm{d}x^{m-1}$$
$$+ \frac{B}{h^{m-2}} \int^{m-2} u \mathrm{d}x^{m-2} \ldots + \frac{M}{h} \int u \,\mathrm{d}x$$
$$+ Nu + Ph \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Qh^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.}$$

et lorsqu'on fera $u = e^z$, deviendra

$$\frac{1}{(e^h-1)^m} = \frac{1}{m} + \frac{A}{h^{m-1}} + \frac{B}{h^{m-1}} \ldots\ldots + \frac{M}{h} + N + P h + Q h^2 + \text{etc.}$$

les coefficiens A, B, ... M, N, etc. sont donc encore ici ceux qui multiplient les puissances de h dans le développement de $\frac{1}{(e^h-1)^m}$; et déjà nous ne pouvons nous empêcher de remarquer, entre les intégrales et les puissances négatives, une analogie qui n'est que la continuation de celle que les différences ont avec les puissances positives : en sorte que l'on peut regarder les intégrales comme les différences d'un ordre dont l'exposant est négatif. Il est visible, en effet, que d'après ce qu'on vient de voir, on peut écrire

$$\Sigma^m u = \frac{1}{\left(e^{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h} - 1\right)^m},$$

pourvu qu'après le développement on change les puissances positives $\frac{\mathrm{d}u^p}{\mathrm{d}x^p}$ en $\frac{\mathrm{d}^p u}{\mathrm{d}x^p}$, et les puissances négatives $\frac{\mathrm{d}u^{-p}}{\mathrm{d}x^{-p}}$ en $\int^p u\,\mathrm{d}x^p$; et puisque l'on a (347),

$$\left(e^{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h} - 1\right)^m,$$

il est évident que l'expression de $\Sigma^m u$ est comprise dans celle de $\Delta^m u$, dont elle se déduit en affectant l'exposant m du signe —.

366. L'intégration par parties se pratique sur les différences aussi bien que sur les différentielles. Soient P

et Q, deux fonctions quelconques de x, et faisons

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P + z,$$

z étant une fonction inconnue de la même variable. En prenant la différence de chaque membre de cette équation, on aura

$$PQ = (Q+\Delta Q)\Sigma(P+\Delta P) - Q\Sigma P + \Delta z;$$

développant et réduisant, en observant $Q\Sigma\Delta P = PQ$, il viendra

$$0 = \Delta Q\Sigma(P+\Delta P) + \Delta z, \text{ ou } \Delta z = -\Delta Q\Sigma(P+\Delta P),$$

et par conséquent

$$z = -\Sigma(\Delta Q\Sigma(P+\Delta P)) = -\Sigma\Delta Q\Sigma P_1, \ \Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma\Delta Q\Sigma P_1.$$

Soit encore $\Sigma(\Delta Q\Sigma P_1) = \Delta Q\Sigma^2 P_1 + z$; si l'on prend les différences et que l'on opère comme ci-dessus, on trouvera successivement

$$\Delta Q\Sigma P_1 = (\Delta Q + \Delta^2 Q)\Sigma(\Sigma P_1 + P_1) - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta z,$$
$$0 = \Delta^2 Q\Sigma(\Sigma P_1 + P_1) + \Delta z, \text{ ou } \Delta z = -\Delta^2 Q\Sigma(\Sigma P_1 + P_1).$$

Il est facile de reconnoître que

$$\Sigma P_1 + P_1 = \Sigma P_1 + \Delta.\Sigma P_1 = \Sigma(P_1 + \Delta P_1) = \Sigma P_2,$$

et l'on aura par conséquent

$$\Delta z = -\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2, \quad \Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Sigma(\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2).$$

Pour aller au-delà de ce résultat, on fera

$$\Sigma(\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2) = \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 + z,$$

et on obtiendra

$$\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2 = (\Delta^2 Q + \Delta^3 Q)\Sigma(\Sigma^2 P_2 + \Sigma P_2) - \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 + \Delta z$$
$$0 = \Delta^3 Q\Sigma(\Sigma^2 P_2 + \Sigma P_2) + \Delta z, \text{ ou } \Delta z = -\Delta^3 Q\Sigma(\Sigma^2 P_2 + \Sigma P_2);$$

et comme

$$\Sigma^2 P_2 + \Sigma P_2 = \Sigma^2 P_2 + \Delta.\Sigma^2 P_2 = \Sigma^2(P_2 + \Delta P_2) = \Sigma^2 P_3,$$

on parviendra à

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Sigma(\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3),$$

qui renferme la loi de cette expression élégante, donnée pour la première fois par Taylor, dans les Transactions philosophiques :

$$\Sigma PM = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q\Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q\Sigma^5 P_4 - \text{etc.}$$

Si l'on y met pour P_1, P_2, P_3, etc. leurs valeurs en P, et qu'on effectue les intégrations qui deviennent possibles, elle se change en

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P) - \Delta^3 Q(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{etc.}$$

C'est sous cette forme que Condorcet l'a présentée dans son *Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions*, p. 163.

Elle s'arrête toutes les fois que la fonction Q mène à des différences constantes dans un ordre quelconque; et si la fonction P est susceptible d'un nombre suffisant d'intégrations successives, on parvient à l'intégrale exacte de la fonction PQ.

Application du Calcul des différences à la sommation des suites.

367. D'après l'équation

$$S\,f(x, h) = \Sigma f(x, h) + f(x, h) - \textit{const.}$$

obtenue dans le n°. 357, chacune des fonctions intégrées dans ce qui précède, nous donnera la somme

de la suite dont cette fonction représente le terme général.

Il est visible qu'au lieu d'ajouter à la fonction $\mathfrak{s}f(x,h)$ sa différence, on peut se borner à mettre $x+h$ au lieu de x dans $\mathfrak{s}f(x,h)$.

On trouvera, d'après cela, Sx^m, en mettant $x+h$ au lieu de x dans l'expression de Σx^m.

En écrivant $n+1$ au lieu de n dans les expressions du n°. 361, on aura les sommes des *nombres figurés*, savoir :

$$Sn = \frac{n(n+1)}{2} - const.$$

$$S\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} - const.$$

$$S\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4} - const.$$

etc.

On conclura des n°s 362, 363, que

$$Sa^x = \frac{a^{x+h}}{a^h-1} - const.$$

$$S\sin x = -\frac{\cos(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} - const.$$

$$s x = \frac{\sin(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} - const.$$

Enfin, l'expression générale de $\mathfrak{s}u$ du n°. 364, donne une formule générale pour Su.

Les constantes ajoutées dans les intégrales aux différences et dans les sommes, se déterminent comme celles des intégrales relatives aux différentielles; mais il est plus commode de prendre ces intégrales ou ces sommes, entre des limites données comme dans le n° 210.

En faisant commencer les séries des nombres figurés à l'indice $n=0$, on trouvera que leurs sommes respectives

sont les expressions rapportées ci-dessus, débarassées de la constante.

Pour trouver, par exemple, la somme de la série

$$\sin a, \quad \sin(a+b)\ldots\sin(a+nh),$$

il faudra prendre $S\sin x$, de puis $x=a-h$, jusqu'à $x=a+nh$, et il viendra

$$\frac{\cos(a-\frac{1}{2}h)-\cos(a+ah+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}=\frac{\sin(a+\frac{1}{2}nh)\sin\frac{1}{2}(n+1)h}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

De l'intégration des équations aux différences, à deux variables.

368. Jusqu'ici nous avons supposé que la différence de la fonction cherchée étoit donnée explicitement par la variable indépendante; nous allons maintenant nous occuper des cas où l'on a seulement une équation contenant la fonction cherchée, ses différences, la variable indépendante et ses accroissemens. Supposons d'abord que la fonction cherchée y dépende de la variable x, dont l'accroissement, considéré comme constant, sera désigné à l'ordinaire par h. L'équation proposée sera comprise dans la formule générale

$$F(x, h, y, \Delta y, \Delta^2 y, \text{etc.})=0.$$

Il est à propos d'observer que l'on peut en faire disparoître les différences Δy, $\Delta^2 y$, etc. en les remplaçant par les valeurs consécutives de y, puisqu'on a

$$\Delta y=y_1-y, \quad \Delta^2 y=y_2-2y_1+y, \text{ etc.}$$

et le résultat prendra la forme

$$F(x, h, y, y_1, y_2, \text{etc.})=0,$$

dans laquelle on voit que toute équation aux diffé-

rences fait connoître la valeur de la fonction cherchée, par le moyen d'un certain nombre de valeurs antécédentes.

Si l'équation étoit du premier ordre, par exemple, on auroit y_1, par le moyen de y; si elle étoit du second, on en tireroit y_2, exprimé par y_1 et par y, et ainsi de suite.

Il est facile de s'appercevoir qu'une équation quelconque aux différences, équivaut à une série, dans laquelle on obtient chaque terme par le moyen de sa relation avec ceux qui le précèdent et avec l'indice qui marque le rang qu'il occupe. En effet, lorsqu'on a, par exemple, $y_2 = f(x, h, y, y_1)$, on en déduit

$y_3 = f(x+h, h, y_1, y_2)$, $y_4 = f(x+2h, h, y_2, y_3)$, etc.

et l'on forme ainsi la série

$$y, y_1, y_2, y_3, y_4, \text{ etc.}$$

au moyen de ses deux premiers termes.

Ce cas particulier suffit pour montrer que *dans la série résultante d'une équation quelconque aux différences, il y aura toujours autant de termes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de cette équation.*

369. On peut changer toute équation aux différences en une équation différentielle d'un ordre indéfini, en substituant, au lieu de Δy, $\Delta^2 y$, etc. leurs développemens d'après le n°. 347, et il n'est pas moins évident que l'on convertiroit aussi toute équation différentielle en une équation aux différences d'un ordre indéfini, en remplaçant les coefficiens différentiels par leurs développemens tirés de la formule du n°. 348.

Il ne paroît pas que ces transformations, qui ont l'inconvénient d'introduire un nombre infini de termes, puissent être, en général, fort utiles pour l'intégration des équations; mais elles sont très-propres à faire sentir la différence qui existe entre le Calcul différentiel et le Calcul aux différences. Elles prouvent que par la nature de ce dernier, les différences de la variable indépendante doivent avoir nécessairement une valeur déterminée; car si l'on avoit une équation entre

$$x, y, \Delta x, \Delta y, \Delta^2 y, \text{ etc.}$$

dans laquelle Δx demeurât indéterminé, qu'on la développât suivant les puissances de Δx, Δy, $\Delta^2 y$, etc. ce qui lui donneroit la forme

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta x + B\Delta y \\ + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta^2 y \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0;$$

on y pourroit substituer, au lieu de Δy, $\Delta^2 y$, etc. leurs développemens, et comme Δx y resteroit encore indéterminé, il faudroit que les coefficiens des diverses puissances de cet accroissement, s'évanouissent d'eux-mêmes. On obtiendroit ainsi, entre les variables x, y, et leurs différentielles, un nombre infini d'équations qui devroient s'accorder entr'elles pour que la proposée signifiât quelque chose; et dans ce cas elle ne seroit équivalente qu'à la première de ces équations, dont les autres deviendroient les différentielles successives.

En ne supposant l'équation aux différences que du premier ordre, ce qui la réduit à

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \text{etc.} = 0,$$

et

et prenant

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

il vient

$$\left.\begin{array}{l} B\dfrac{dy}{dx} \\ +A \end{array}\right\} \Delta x + E\frac{dy^2}{dx^2} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Delta x^2 + \text{etc.} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} = 0,$$
$$+ D\frac{dy}{dx}$$
$$+ C$$
$$+ \frac{B}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

d'où l'on tire

$$B\frac{dy}{dx} + A = 0, \qquad E\frac{dy^2}{dx^2} + D\frac{dy}{dx} + C + \frac{B}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{etc.}$$

et si cette suite d'équations ne peut avoir lieu, la proposée ne pourra se vérifier qu'en assignant à Δx une valeur particulière.

370. Ces préliminaires posés, entrons en matière par l'intégration de l'équation générale du premier degré et du premier ordre.

Supposons que la différence de la variable x, ou Δx, étant 1, on ait l'équation $\Delta y + Py = Q$, analogue à l'équation différentielle que nous avons traitée dans le n°. 257; un procédé semblable à celui du n°. cité va nous conduire à son intégrale. Faisons $y = uz$, et nous aurons

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z,$$

ce qui changera l'équation proposée en

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Puz = Q;$$

en posant séparément

$$z\Delta u + Puz = 0, \text{ ou } \Delta u + Pu = 0,$$

il restera $u\Delta z+\Delta u\,\Delta z=Q$, d'où l'on tirera

$$\Delta z=\frac{Q}{u+\Delta u}\text{ et }z=\Sigma\frac{Q}{u+\Delta u}.$$

La question se réduit donc à intégrer l'équation

$$\Delta u+Pu=0,$$

dans laquelle on peut séparer les variables, en lui donnant la forme $\frac{\Delta u}{u}=-P$, puisque P est supposé ne contenir que x. Prenons $u=e^t$, il en résultera

$$\Delta u=e^t(e^{\Delta t}-1)\text{ et }\frac{\Delta u}{u}=e^{\Delta t}-1=-P,$$

d'où nous tirerons

$$e^{\Delta t}=1-P,\ \Delta t=l(1-P)\text{ et }t=\Sigma l(1-P).$$

Mais la somme des logarithmes de la fonction $1-P$, répondant au produit continuel des valeurs successives que reçoit $1-P$ entre les limites de l'intégrale, c'est-à-dire, à

$$(1-P_{x-1})(1-P_{x-2})(1-P_{x-3})\ldots(1-P_0),$$

si on désigne ce produit par $[1-P_{x-1}]^{\overline{x}}$, l'exposant x marquant le nombre des facteurs, on aura

$$t=l[1-P_{x-1}]^{\overline{x}},$$

d'où on conclura

$$u=e^t=[1-P_{x-1}]^{\overline{x}};$$

et si l'on fait attention que $u+\Delta u=u_1$, on obtiendra

$$u+\Delta u=[1-P_x]^{\overline{x+1}}\text{ et }z=\frac{Q}{[1-P_x]^{\overline{x+1}}},$$

ce qui donnera enfin

$$y=[1-P_{x-1}]^{x}\Sigma\frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}},$$

la constante arbitraire étant comprise dans l'intégrale indiquée.

C'est à peu près ainsi que Lagrange, qui le premier fit voir l'analogie que les équations aux différences du premier degré, ont avec les équations différentielles du même degré, a intégré, en 1761, l'équation traitée ci-dessus; il applique ensuite son résultat à l'équation $y_1=Ry+Q$, qui revient à $y+\Delta y=Ry+Q$. En comparant cette dernière avec $\Delta y+Py=Q$, il vient $P=1-R$, $1-P=R$, et l'on a par conséquent

$$y=[R_{x-1}]^{x}\Sigma\frac{Q}{[R_x]^{x+1}}.$$

Dans le développement du produit $[1-P_{x-1}]^{x}$, nous avons supposé, pour plus de simplicité, la différence de x égale à l'unité; on pourroit conserver la même expression, en concevant qu'elle répond à

$$(1-P_{x-n})(1-P_{x-2n})(1-P_{x-3n})\text{ etc.}$$

lorsque $\Delta x=n$, ou bien transformer l'équation proposée en une autre, en faisant $x=nx'$, ce qui donneroit $\Delta x=n\Delta x'$ et $\Delta x'=1$.

Si l'on suppose que le coefficient R soit constant, on aura

$$y=R^x\Sigma\frac{Q}{R^{x+1}}.$$

L'intégration indiquée s'effectue facilement lorsque Q

est constant; on obtient dans ce cas

$$\Sigma \frac{Q}{R^{x+1}} = Q\Sigma R^{-x-1} = \frac{QR^{-x-1}}{R^{-1}-1} = \frac{Q}{R^x(1-R)} \quad (362),$$

et $$y = R^x \left\{ \frac{Q}{R^x(1-R)} + const \right\}.$$

En général, on obtiendra la valeur de y, délivrée du signe d'intégration toutes les fois que Q sera une fonction rationnelle et entière de x.

371. Dans les recherches citées n°. précédent, Lagrange applique aux équations du premier degré et d'un ordre quelconque aux différences, la méthode que d'Alembert a donnée pour les équations différentielles du premier degré et dont nous avons fait connoître l'esprit, n°. 306 ; mais il est revenu sur ce sujet en 1775, par une méthode encore plus simple, que nous allons faire connoître.

Représentons par

$$y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} \ldots + U_x y_x = V_x \quad (A),$$

une équation d'un ordre quelconque et du premier degré par rapport à la fonction y_x ; on prouve, comme dans le n°. 302, que son intégration se ramène à celle de

$$z_{x+n} + P_x z_{x+n-1} + Q_x z_{x+n-2} \ldots + U_x z_x = 0 \quad (B),$$

et que l'on obtient la valeur complète de z_x, lorsqu'on en connoît un nombre n de valeurs particulières.

Cette proposition est évidente par elle-même ; car il est clair que si

$$z'_x, \quad z''_x, \quad z'''_x, \ldots$$

sont des fonctions de x, qui satisfassent à l'équation (B), l'expression

$$z = C'z'_x + C''z''_x + C'''z'''_x + \text{etc.}$$

y satisfera pareillement ; et quand le nombre de ses ter-

mes supposés absolument irréductibles entr'eux sera n, elle sera l'intégrale complète de cette équation, puisqu'elle renfermera n constantes arbitraires, C', C'', C''', etc.

Cela posé, si l'on regarde ces constantes comme des fonctions de x, et que dans cette hypothèse on change z_x en y_x, ou que l'on fasse

$$y_x = C'_x z'_x + C''_x z''_x + C'''_x z'''_x + \text{etc.}$$

on en déduira d'abord

$$y_{x+1} = C'_{x+1} z'_{x+1} + C''_{x+1} z''_{x+1} + C'''_{x+1} z'''_{x+1} + \text{etc.}$$

résultat qui se transforme en

$$\begin{aligned} y_{x+1} = {} & C'_x z'_{x+1} + C''_x z''_{x+1} + C'''_x z'''_{x+1} + \text{etc.} \\ & + z'_{x+1} \Delta C'_x + z''_{x+1} \Delta C''_x + z'''_{x+1} \Delta C'''_x + \text{etc.} \end{aligned}$$

en mettant pour C'_{x+1}, C''_{x+1}, leurs valeurs

$$C'_x + \Delta C'_x,\ C''_x + \Delta C''_x,\ \text{etc.}$$

et se réduit à

$$y_{x+1} = C'_x z'_{x+1} + C''_x z''_{x+1} + C'''_x z'''_{x+1} + \text{etc.}]$$

lorsqu'on fait

$$z_{x+1} \Delta C'_x + z''_{x+1} \Delta C''_x + z'''_{x+1} \Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (1),$$

de même que si les quantités C'_x, C''_x, C'''_x, etc. fussent demeurées constantes. En faisant de nouveau varier x, on obtiendra

$$\begin{aligned} y_{x+2} = {} & C'_{x+1} z'_{x+2} + C''_{x+1} z'_{x+2} + C'''_{x+1} z'''_{x+2} + \text{etc.} \\ = {} & C'_x z'_{x+2} + C''_x z''_{x+2} + C'''_x z'''_{x+2} + \text{etc.} \\ & + z'_{x+2} \Delta C'_x + z''_{x+2} \Delta C''_x + z'''_{x+2} \Delta C'''_x + \text{etc.} \end{aligned}$$

résultat que l'on réduira à

$$y_{x+2} = C'_x z'_{x+2} + C''_x z''_{x+2} + C'''_x z'''_{x+2} + \text{etc.}$$

par la supposition de

$$z'_{x+2} \Delta C'_x + z''_{x+2} \Delta C''_x + z'''_{x+2} \Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (2).$$

Faisant varier x une troisième fois, on parvient à

$$y_{x+3}=C'_x z'_{x+3}+C''_x z''_{x+3}+C'''_x z'''_{x+3}+\text{etc.}$$

en posant

$$z'_{x+3}\Delta C'_x+z''_{x+3}\Delta C''_x+z'''_{x+3}\Delta C'''_x+\text{etc.}=0 \quad (3),$$

et l'on continue ainsi jusqu'aux équations

$$y_{x+n-1}=C'_x z'_{x+n-1}+C''_x z''_{x+n-1}+C'''_x z'''_{x+n-1}+\text{etc.}$$
$$z'_{x+n-1}\Delta C'_x+z''_{x+n-1}\Delta C''_x+z'''_{x+n-1}\Delta C'''_x+\text{etc.}=0 \quad (n-1).$$

Maintenant, si dans la valeur de y_{x+n-1} on change x en $x+1$, on trouvera

$$y_{x+n}=C'_x z'_{x+n}+C''_x z''_{x+n}+C'''_x z'''_{x+n}+\text{etc.}$$
$$+z'_{x+n}\Delta C'_x+z''_{x+n}\Delta C''_x+z'''_{x+n}\Delta C'''_x+\text{etc.}$$

mettant dans l'équation (A) les valeurs de

$$y_x, y_{x+1}, \ldots y_{x+n-1}, y_{x+n},$$

en observant que par l'hypothèse et d'après l'équation (B),

$$z'_{x+n}+P_x z'_{x+n-1}+Q_x z'_{x+n-2}\ldots+U_x z'_x=0$$
$$z''_{x+n}+P_x z''_{x+n-1}+Q_x z''_{x+n-2}\ldots+U_x z''_x=0$$
$$z'''_{x+n}+P_x z'''_{x+n-1}+Q_x z'''_{x+n-2}\ldots+U_x z'''_x=0,$$

etc.

il restera

$$z'_{x+n}\Delta C'_x+z''_{x+n}\Delta C''_x+z'''_{x+n}\Delta C'''_x+\text{etc.}=V_x \ldots (n).$$

On conçoit facilement qu'avec le secours des équations (1), (2), ...$(n-1)$, (n), on déterminera en fonctions de x, les différences $\Delta C'_x$, $\Delta C''_x$, $\Delta C'''_x$, etc. ce qui réduira la recherche des quantités C', C'', C''', etc. à l'intégration des fonctions d'une seule variable.

372. Il convient donc de nous occuper de l'équation

$$z_{x+n}+P_x z_{x+n-1}+Q_x z_{x+n-2}+R_x z_{x+n-3}\ldots+U_x z_x=0$$

Lorsque les coefficiens de cette équation, au lieu d'être des fonctions de x, sont des constantes, ou que l'on a seulement

$$z_{x+n}+Pz_{x+n-1}+Qz_{x+n-2}+Rz_{x+n-3}\ldots+Uz_x=0\ldots(C),$$

on y satisfait en faisant $z_x=m^x$, d'où il résulte

$$z_{x+1}=m^{x+1},\quad z_{x+2}=m^{x+2},\ldots\ldots z_{x+n}=m^{x+n};$$

elle devient

$$m^n+Pm^{n-1}+Qm^{n-2}+Pm^{n-3}\ldots+U=0\ldots\ldots(D),$$

et sera vérifiée si l'on prend pour l'indéterminée m les racines de cette dernière. Si donc on désigne par m', m'', m''', etc. ces diverses racines, on aura (n°. précéd.)

$$z_x=Cm'^x+C'm''^x+C''m'''^x+\ldots\ldots$$

Cette expression présente par rapport aux quantités m', m'', m''', etc. les mêmes circonstances que l'intégrale de l'équation différentielle

$$d^nz+P\,dx\,d^{n-1}z+Q\,dx^2d^{n-2}z\ldots+Uz\,dx^n=0\ (303)$$

Il peut arriver que les racines de l'équation (D) soient toutes inégales, ou qu'il s'en trouve d'égales entr'elles; dans le premier cas la valeur de z est complète; mais elle cesse de l'être dans le second. Il faut alors recourir à des artifices d'analyse, semblables à ceux que nous avons employés pour l'équation différentielle; mais nous ne saurions nous engager ici dans ces détails, non plus que dans ceux qui regardent les racines imaginaires.

373. L'équation (C), qui peut être considérée comme exprimant la nature d'une série dont un terme quelconque, représenté par z_{x+n}, dépend des n termes qui le

précèdent, se rapporte aux *séries récurrentes* (*Compl. des Elém. d'Alg.*) dont le terme général est z_x et dont l'échelle de relation est

$$-P, \quad -Q, \ldots\ldots -U.$$

L'intégration de cette équation répond donc à la recherche du terme général de la suite proposée; mais en n'ayant égard qu'à la loi de sa formation, ses n premiers termes sont nécessairement arbitraires; et si on les suppose donnés *à priori*, en les désignant par

$$z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_{n-1},$$

on pourra former les équations

$$\begin{aligned}
z^0 &= C' + C'' + C''' + \text{etc.}\\
z_1 &= C'm' + C''m'' + C'''m''' + \text{etc.}\\
z_2 &= C'm'^2 + C''m''^2 + C'''m'''^2 + \text{etc.}\\
z^3 &= C'm'^3 + C''m''^3 + C'''m'''^3 + \text{etc.}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{n-1} &= C'm'^{n-1} + C''m''^{n-1} + C'''m'''^{n-1} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

au moyen desquelles on déterminera les constantes C', C'', C''',..... dont le nombre est aussi égal à n. La résolution de ces équations, qui ne sont d'ailleurs que du premier degré, peut être simplifiée par des artifices dont l'exposition ne sauroit entrer dans un Traité élémentaire : on les trouve dans le Traité complet, déjà cité plusieurs fois; je me bornerai à observer ici que cette recherche se lie avec celle des lois des phénomènes d'après les observations.

De la nature des arbitraires introduites par l'intégration des équations aux différences, et de la construction de ces quantités.

574. Les quantités arbitraires, introduites par l'intégration des équations aux différences à deux varia-

bles ; ne sont pas nécessairement constantes comme celles qui complètent les intégrales des équations différentielles ; mais pour donner aux résultats toute la généralité dont ils sont susceptibles, on doit regarder ces arbitraires comme variables. En effet, l'équation $\Delta y = 0$ n'exprime pas absolument que la fonction y soit constante, mais seulement qu'elle ne change point de valeur lorsque x devient $x + \Delta x$.

Si, par exemple, Δx est égal à h, on pourra prendre pour y toutes les fonctions de x, qui conservent la même valeur quand on y met $x+h$, au lieu de x. Or il est facile de voir que parmi les fonctions circulaires, il s'en trouve un nombre infini qui jouissent de cette propriété : telles sont les fonctions de $\sin\frac{2\varpi x}{h}$, $\cos\frac{2\varpi x}{h}$, lorsque ϖ désigne la demi-circonférence ; car la substitution de $x+h$, au lieu de x dans ces quantités, donne

$$\sin\left(2\varpi+\frac{2\varpi x}{h}\right)=\sin\frac{2\varpi x}{h},\quad \cos\left(2\varpi+\frac{2\varpi}{h}\right)=\cos\frac{2\varpi x}{h},$$

on peut donc dans cette hypothèse prendre

$$y=\phi\left(\sin\frac{2\varpi x}{h},\ \cos\frac{2\varpi x}{h}\right)$$

pour l'intégrale de $\Delta y = 0$, au lieu de $y = const.$ en considérant d'ailleurs la fonction ϕ comme entièrement arbitraire.

Il est évident que la fonction qui complète l'intégrale de l'équation $\Delta y = 0$, prise dans l'hypothèse de $\Delta x = h$, compléteroit aussi celle de toute autre équation aux différences du premier ordre prise dans la même hypothèse ; il faut donc dans l'intégrale de l'équation générale du premier ordre, donnée n°. 370, substi-

tuer au lieu de C, la quantité $\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$, puisqu'on y suppose $\Delta x = 1$.

375. La détermination des fonctions arbitraires qui complètent les intégrales des équations aux différences, ne peut s'opérer en assujettissant ces intégrales à satisfaire à un nombre limité de valeurs données, car il est visible que toute fonction arbitraire comprend implicitement un nombre infini de valeurs arbitraires. Soit pour exemple l'équation

$$y_x = X\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x),$$

de laquelle on doive tirer un certain nombre de valeurs

$$y_0 = a, \quad y_1 = a', \quad y_2 = a'', \text{ etc.}$$

Si ces valeurs répondent à

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \text{ etc.}$$

on ne pourra satisfaire en général qu'à la première des conditions imposées; car dès qu'on aura assigné pour $\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$, une première valeur déterminée, de laquelle il résulte $y_0 = a$, cette valeur devant se retrouver la même pour les indices $x = 1$, $x = 2$, etc. il s'ensuit que les valeurs de y_x, relatives à ces indices, sont aussi déterminées; il faut donc que les quantités données a', a'', etc. correspondent à des indices intermédiaires.

Si, au lieu d'assigner un nombre limité de valeurs isolées, indépendantes les unes des autres, on suppose que dans l'intervalle compris entre $x = 0$, $x = 1$, l'expression y_x doive fournir les mêmes valeurs qu'une équation donnée $y_x = f(x)$, la question sera déterminée. En effet, s'il s'agissoit de trouver la valeur de y qui correspond à un indice égal à un nombre entier quelconque m, plus une fraction n, soit commensurable,

soit incommensurable, on calculeroit la valeur de y_n, d'après l'équation $y_x = f(x)$; comparant le résultat avec celui que donne alors l'équation

$$y_x = X\varphi(\sin 2\pi n, \cos 2\pi n),$$

on auroit, pour ce cas, la valeur de

$$\varphi(\sin 2\pi n, \cos 2\pi n),$$

qui doit être la même que celle de

$$\phi(\sin 2\pi(m+n), \cos 2\pi(m+n)),$$

et l'équation

$$y_x = X\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x),$$

devenant par-là

$$y_{m+n} = X_{m+n}\varphi(\sin 2\pi n, \cos 2\pi n)$$

seroit entièrement déterminée.

La seule condition à laquelle soit assujettie l'équation $y_x = f(x)$, c'est qu'on en tire pour y_0 et pour y_1 les mêmes valeurs que de l'équation

$$y_x = X\phi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x).$$

376. Les remarques précédentes s'offrent d'elles-mêmes, par les considérations géométriques. Si l'on construit sur la droite AR, *fig.* 58, menée à une distance quelconque de l'axe des abscisses OX, parallèlement à cet axe, et divisée en parties AA', $A'A''$, $A''A'''$, etc. égales à Δx, des courbes telles que FIG. 58.

$$ABA'B'A''B''A'''S,\ ACA'C'A''C''A'''T,\ ADA'D'A''D''A'''U, \text{ etc.}$$

passant par les points A, A', A'', A''', etc. et composées entre ces points de parties égales et semblables, ces courbes satisferont à l'équation $\Delta y = 0$. Cela est d'abord

evident pour les points A, A', A'', A''', etc. et l'on voit ensuite que, prenant $AP=x$, $AP'=x+\Delta x$, les arcs

$$AL \text{ et } A'L', \quad AM \text{ et } A'M', \quad AN \text{ et } A'N', \text{ etc.}$$

étant égaux et semblables, les ordonnées

$$LP \text{ et } L'P', \quad MP \text{ et } M'P', \quad NP \text{ et } N'P', \text{ etc.}$$

seront aussi respectivement égales; et l'on aura par conséquent pour chaque courbe $\Delta y=0$.

La condition $\Delta y=0$, n'entraînant point la continuité dans les résultats, les courbes AS, AT, AU, etc. ne seront point assujetties à cette loi. Le polygone $EFE'F'E''F''E'''\ldots V$, composé de parties semblables EFE', $E'F'E''$, etc. donne également $\Delta y=0$, aux intervalles marqués par Δx; il en seroit de même d'une suite d'arcs égaux et semblables d'une courbe quelconque assemblés d'une manière discontigue, comme le sont les arcs GH, $G'H'$, $G''H''$, etc.

Il est visible que l'équation $y=\varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{\Delta x}, \cos\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)$ donne lieu à des lignes qui satisfont aux conditions ci-dessus.

377. La construction des équations aux différences s'accorde parfaitement avec ce qui a été dit (375) sur la détermination analytique des fonctions arbitraires. Soit $\Delta y=F(x, y)$, une équation de ce genre et du premier ordre; ayant choisi arbitrairement, ou déterminé, suivant les conditions de la question, le premier point B, *fig.* 59, de la courbe cherchée, comme l'équation proposée n'apprend rien sur tous les points correspondans à la portion d'abscisses $AA'=\Delta x$, et qu'elle donne seulement l'ordonnée $A'B'=y_1$, on pourra faire passer par les points B et B', une portion d'une courbe

FIG. 59.

quelconque. Cela fait, pour obtenir la portion correspondante à l'abscisse $A'A''$, on prendra en arrière d'un point quelconque P' de cette abscisse, une distance $PP'=AA'=\Delta x$, et élevant l'ordonnée PM, on mènera MD' parallèle à AR; tirant ensuite de l'équation $\Delta y=F(x,y)$ la valeur de Δy pour l'abscisse AP', cette valeur donnera la droite $D'M'$, qui jointe à $P'D'=PM$, fera connoître le point M'. On trouvera de même tous les points de l'arc $B'B''$; cet arc employé à son tour comme l'arc BB', donnera ceux du troisième arc $B''B'''$, et ainsi de suite.

Il est évident que l'on pourroit, par le même procédé, continuer la courbe en arrière du point A, et que dans tous les cas elle satisfera à l'équation proposée, puisque les différences $\Delta y=D'M'$ auront des valeurs conclues de cette équation : nous laissons au lecteur à faire l'application de ce procédé aux équations du second ordre et des ordres supérieurs.

On n'a considéré ici que les équations aux différences relatives à l'hypothèse de $\Delta x=const.$ les autres se ramènent à celles-ci par un procédé fort simple dû à Laplace, et inséré dans le *Traité du Calcul différentiel* et *du Calcul intégral.*

Application du Calcul intégral à la Théorie des suites.

378. L'intégration des différentielles à une seule variable ayant conduit à des séries, on en a conclu qu'on pouvoit représenter une série par une intégrale; et comme on a des méthodes pour calculer, au moins par approximation, la valeur d'une intégrale entre des limites données (210), on a cherché à remonter d'une série à l'intégrale dont elle est un des développemens.

C'est par ces considérations qu'Euler a créé, pour la sommation des séries et la recherche de leur terme général, des méthodes très-ingénieuses dont voici quelques exemples :

Soit d'abord

$$\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{2\alpha+\beta}{2a+b}x^2\ldots+\frac{\alpha n+\beta}{an+b}x^n+\text{etc.}$$

la série proposée ; on multipliera par px^r les deux membres de l'équation

$$s=\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{2\alpha+\beta}{2a+b}x^2\ldots+\frac{\alpha n+\beta}{an+b}x^n,$$

et passant ensuite aux différentielles, celle du terme général sera

$$\frac{p(n+r)\,(\alpha n+\beta)x^{n+r-1}\mathrm{d}x}{a\,n+b};$$

Le facteur $an+b$ disparoîtroit du dénominateur, si l'on avoit $p(n+r)=an+b$; on fera donc $pn=an$, $pr=b$, ce qui donnera cette équation

$$\frac{a\,\mathrm{d}(sx^{\frac{b}{a}})}{\mathrm{d}x}=(\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}}+(2\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}+1}\ldots\ldots\ldots$$
$$+(\alpha n+\beta)x^{\frac{b}{a}+n-1},$$

dont le second membre ne renferme plus de dénominateur. De nouvelles opérations, semblables à la précédente, feroient disparoître les facteurs qui resteroient, si le dénominateur en contenoit plus d'un.

En multipliant la même équation par px^r; et prenant ensuite l'intégrale de chaque terme, celle du

terme général sera

$$\frac{ap(\alpha n+\beta)x^{\frac{b}{a}+r+n}}{b+ar+an};$$

le facteur $\alpha n+\beta$ du numérateur disparoîtra si l'on fait $a\alpha pn=an$, $ap\beta=b+ar$,
d'où il suit

$$p=\frac{1}{\alpha},\quad r=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\mathrm{d}(x^{\frac{b}{a}}s)=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}+x^{\frac{\beta}{\alpha}+2}\ldots\ldots+x^{\frac{\beta}{\alpha}+n}$$

$$=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\{1+x+x^2\ldots\ldots+x^{n-1}\}$$

et par conséquent

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\mathrm{d}(x^{\frac{b}{a}}s)=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right).$$

On tire de-là

$$s=\frac{\alpha\int x^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}\left(x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right)}{ax^{\frac{b}{a}}}.$$

379. Dans la série que nous avons considérée ci-dessus, le nombre des facteurs, soit du numérateur, soit du dénominateur, étoit le même pour chaque terme; mais il est une classe de séries qu'Euler désigne sous le nom d'*hypergéométriques*, dans laquelle ce nombre augmente d'un terme à l'autre : la série

$$s=\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{(a+b)(2a+b)}x^2\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots\ldots\ldots(an+b)}x^n$$

est de cette classe. On va voir que leur sommation se ramène à l'intégration d'une équation différentielle.

En multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par $px^r dx$, et prenant leurs intégrales, on obtiendra

$$p\int s x^r dx = \frac{p(\alpha+\beta)x^{r+\alpha}}{(r+\alpha)(a+b)} \cdots\cdots\cdots + \frac{p(\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)x^{r+\alpha n+\alpha}}{(r+n+1)(a+b)\cdots(an+b)}.$$

On fera disparoître le facteur $\alpha n+\beta$ du numérateur, en posant

$$p(\alpha n+\beta) = r+n+1,$$

d'où

$$p\alpha n = n, \quad p\beta = r+1,$$

$$p = \frac{1}{\alpha}, \quad r = \frac{\beta-\alpha}{\alpha},$$

$$\frac{\int x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} s\,dx}{\alpha} = \frac{x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}}{a+b} \cdots\cdots\cdots + \frac{(\alpha+\beta)\cdots(\alpha(n-1)+\beta)x)^{\frac{\beta}{\alpha}+n}}{(a+b)\cdots\cdots(an+b)}.$$

En multipliant ce résultat par px^r, et prenant la différentielle de chacun des membres, on trouvera l'équation

$$\frac{d(px^r\int x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} s\,dx)}{\alpha\,dx} = \frac{p(\beta+\alpha+\alpha r)x^{\frac{\beta}{\alpha}+r}}{\alpha(a+b)} \cdots\cdots + \frac{p(\beta+\alpha n+\alpha r)(\alpha+\beta)\cdots(\alpha(n-1)+\beta)x^{\frac{\beta}{\alpha}+\alpha+r-1}}{\alpha\quad(a+b)\cdots\quad(an+b)}$$

et le facteur $an+b$ disparoîtra du dénominateur, si

$$p(\beta+\alpha n+\alpha r) = \alpha(an+b),$$

ou

ou si $$p=a,\ r=\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Divisant ensuite les deux membres par $x^{\frac{b}{a}}$, on aura

$$\frac{\alpha \mathrm{d}\left(x^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}} \int x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} s\mathrm{d}x\right)}{\alpha x^{\frac{b}{a}} \mathrm{d}x} = 1 + \frac{(\alpha+\beta)x}{a+b} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(\alpha+\beta)\ldots.(\alpha(n-1)+\beta)x^{n-1}}{(a(n-1)+b)}.$$

Le second membre de ce résultat n'est autre chose que la série proposée, dont on a ôté le dernier terme, et à laquelle on a ajouté l'unité ; on conclura donc de ce qui précède,

$$\frac{\alpha \mathrm{d}\left(x^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}} \int x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} s\mathrm{d}x\right)}{\alpha x^{\frac{b}{a}} \mathrm{d}x} = 1 + s$$

$$- \frac{(\alpha+\beta)\ldots.(\alpha n+\beta)x^n}{(a+b)\ldots(an+b)}.$$

On débarrassera cette expression du signe $\int$ en la différentiant deux fois, et en éliminant $\int x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} s\mathrm{d}x$ entre les deux résultats.

Cet exemple montre comment on opéreroit sur d'autres cas plus compliqués de la classe des séries dont il fait partie, en observant que chaque intégration offre le moyen de faire disparoître un facteur du numérateur, et chaque différentiation, un facteur du dénominateur.

380. Si on faisoit abstraction du dernier terme, on auroit, au lieu de la somme particulière, la limite de

la série considérée à l'infini, ou la fonction *génératrice* de cette série, car il est visible que les procédés ci-dessus sont inverses de ceux par lesquels on détermine les séries qui satisfont à des équations différentielles données.

Proposons-nous par exemple de trouver la limite de la série

$$s = 1x - 1.2x^2 + 1.2.3x^3 - \text{etc.}$$

On pourroit appliquer à cette recherche la première transformation du n°. précédent, en faisant

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ a = 0,\ b = 1;$$

mais on y parviendra directement en multipliant par x les deux membres de l'équation posée plus haut, et en les différentiant ensuite : on trouvera de cette manière

$$sx = 1x^2 - 1.2x^3 + 1.2.3x^4 - \text{etc.}$$

$$\frac{\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x} = 1.2x - 1.2.3x^2 + 1.2.3.4.x^3 - \text{etc.}$$

et multipliant la dernière équation par x, il viendra l'équation

$$x\frac{\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x} = 1.2x^2 - 1.2.3x^3 + 1.2.3.4x^4 - \text{etc.}$$

dont le second membre est évidemment égal à $x - s$; ainsi on aura

$$x - s = \frac{x\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x}$$

ou

$$\mathrm{d}s + \frac{s(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

L'intégrale de cette dernière équation est

$$s=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\int e^{-\frac{1}{x}}\,dx \quad (257).$$

Pour que l'expression ci-dessus réponde à la série proposée, il faut que l'intégrale s'évanouisse lorsque $x=0$; et si on la prend jusqu'à $x=1$, on aura la quantité correspondante à la série divergente

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+\text{etc.}$$

381. C'est de cette manière que les intégrales définies servent à évaluer des quantités qu'on obtiendroit difficilement par d'autres moyens; elles prennent souvent des valeurs remarquables.

On voit à la simple inspection des cas particuliers de l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, rapportés dans le n°. 173, que ces expressions se réduisent à un seul terme lorsqu'on les prend entre les limites $x=0$ et $x=1$; l'arc A devenant égal au quart de la circonférence, on a ces deux suites

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}, \qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1,$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.\pi}{2.2} \qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3},$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3\pi}{2.4.2}, \qquad \int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4}{3.5},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5\pi}{2.4.6.2}, \qquad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6}{3.5.7},$$

$$\int\frac{x^8dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.7\pi}{2.4.6.8.2}, \qquad \int\frac{x^9dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9},$$

etc.

et d'après ce tableau, on a en général

$$\int \frac{x^{2r}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5.\ldots.(2r-1)}{2.4.6.\ldots.2r}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6.\ldots.2r}{3.5.7.\ldots.(2r+1)},$$

d'où il suit

$$\left(\int \frac{x^{2r}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\int \frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2r+1}\,\frac{\pi}{2}.$$

En divisant, au contraire, la seconde formule par la première, on trouve

$$\frac{\int \frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int \frac{x^{2r}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2\;2.2.4.4.\ldots\ldots\;2r.2r}{\pi\,1.3.3.5.5.(2r-1)(2r-1)(2r+1)}.$$

Pour savoir ce que devient le premier membre lorsqu'on pousse le nombre des facteurs du second jusqu'à l'infini, ou lorsqu'on fait r infini, je prends $x^{2r} = z$; les limites de z sont les mêmes que celles de x; mais on a

$$x = z^{\frac{1}{2r}}, \quad dx = \frac{1}{2r}\,z^{\frac{1}{2r}-1}$$

$$\int \frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\int \frac{z^{\frac{2}{2r}}\,dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}}$$

$$\int \frac{x^{2r}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\int \frac{z^{\frac{1}{2r}}\,dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}}$$

Le rapport des différentielles étant $z^{\frac{1}{2r}}$, approche d'autant plus de z^0 ou de 1, que le nombre r augmente; en passant à la limite, on peut regarder le rapport des différentielles comme égal à 1; il en sera alors de même de celui des intégrales, puisqu'elles commencent et finissent en même-temps: on conclura donc de-là

$$1=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.\text{etc.}}$$

et par conséquent

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{etc.}}$$

382. Cette expression de la circonférence du cercle est due à Wallis; elle entre dans une formule donnée par Stirling, pour calculer la somme d'une suite de logarithmes appartenans à des nombres en progression par différences. Voici cette formule:

L'expression générale de Su déduite de celle de Σu du n°. 363, lorsqu'on fait $u=\mathrm{l}x$ et $h=1$, devient

$$S\,\mathrm{l}x=\Sigma\,\mathrm{l}x+x\mathrm{l}x=x\mathrm{l}x-x+(1+A)\mathrm{l}x+\frac{B}{x}-\frac{C}{x^3}+\frac{2D}{x^5}-\text{etc.}+const.$$

en observant que $\int \mathrm{d}x\,\mathrm{l}x=x\,\mathrm{l}x-x$ (182); et en calculant le développement de la fonction $\frac{1}{e^h-1}$, suivant les puissances de h, on trouvera

$$A=-\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{12},\quad C=0,\quad D=-\frac{1}{360},\text{ etc.}$$

On sauroit déterminer la constante en faisant $x=1$,

parce que la suite des coefficiens A, B, etc. finit par être divergente : on a recours à l'expression de π du n°. précédent. En passant aux logarithmes, et s'arrêtant au nombre pair $2x$ dans le numérateur, on obtient

$$l x - l 2 = \begin{cases} 2l2+2l4+2l6+2l8+2l10\ldots,+2l(2x-2)+l2x \\ -l1-2l3-2l5-2l7-2l9\ldots.-2l(2x-2)+2l(2x-1) \end{cases}$$

et qu'en prenant les limites dans la supposition de x infini, on trouvera par le moyen de l'expression précédente de $S l x$

$$l1+l2+l3+l4\ldots.+l x = const.+(x+\tfrac{1}{2})lx - x$$
$$l1+l2+l3+l4\ldots.+l2x = const.+(2x+\tfrac{1}{2})l2x-2x$$
$$l2+l4+l6\ldots+l2x = Slx+xl2 = const.+(x+\tfrac{1}{2})lx+xl2-x.$$

Retranchant la troisième série de la seconde, il vient

$$l1+l3+l5+l7\ldots.+l(2x-1) = xlx+(x+\tfrac{1}{2})l2-x,$$

d'où l'on conclut

$$\left.\begin{matrix} 2l2+2l4+2l6\ldots+2l(2x-2)+l2x \\ -2l1-2l3-2l6\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1) \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 2const.+2(x+\frac{1}{2})lx+2xl2-2x-l2x \\ -2xlx-2(x+\frac{1}{2})l2+2x \end{cases}$$

et comme le premier membre de cette équation est égal à $l\pi - l2$, on obtient d'après la réduction du second,

$$l\pi - l2 = 2\,const. - 2l2,$$

d'où $const. = \frac{1}{2}(l\pi + l2) = \frac{1}{2}l2\pi = l\sqrt{2\pi}$,

résultat bien remarquable, et d'après lequel on a

$$Slx = \tfrac{1}{2}l2\pi + xlx - x + \tfrac{1}{2}lx + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^{3}} \text{ etc.}$$

On rendra cette équation propre à un système quel-

conque de logarithmes, en multipliant par le module les termes dans lesquels il n'entre point de logarithmes.

383. Proposons-nous pour exemple de trouver la somme des logarithmes des 1000 premiers nombres des tables, c'est-à-dire, la valeur de

$$l1+l2+l3\ldots+l1000.$$

La caractéristique l désignant ici des logarithmes ordinaires, le module sera pour abréger, représenté par M; et comme $x=1000$, il viendra

$$\begin{aligned}
x l x &= 3000{,}000000000000\\
+\tfrac{1}{2} l x &= 1{,}500000000000\\
+\tfrac{1}{2} l 2\pi &= 0{,}399089\,9341790\\
-Mx &= -434{,}294481\,903254\,8\\
+\frac{M}{12x} &= +0{,}000036\,1912068\\
-\frac{M}{360\,x^3} &= -0{,}000000000012,
\end{aligned}$$

résultat..... 2567,6046442221328 :

mais

$$l1+l2+l3\ldots\ldots+l1000=l1.2.3\ldots.1000=l\,[1000]^{1000};$$

suivant la notation adoptée dans le n°. 369

$$l\,[1000]^{1000}=2567{,}6046442221328.$$

L'on apprend par-là que le nombre $[1000]^{1000}$, dont le calcul est presque impraticable, doit avoir 2568 chiffres, et que les dix premiers chiffres sur la gauche sont 4023872600, en sorte qu'il est compris entre les nombres qui résultent de 4023872600 et de 4003872601, suivis chacun de 2558 zéros. Cette connoissance suffit dans beaucoup de recherches, où l'on ne demande

que les rapports des produits des grands nombres; et dans ce cas, la valeur approchée de ces rapports devient précieuse par l'impossibilité où l'on est d'effectuer les calculs nécessaires pour arriver à la valeur exacte. La longueur de ces calculs devient alors un obstacle aussi insurmontable que la difficulté d'exprimer rigoureusement une fonction transcendante. Laplace a beaucoup étendu cette recherche, dont les applications sont très-fréquentes dans le calcul des probabilités.

384. Les intégrales définies fournissent aussi le moyen de représenter des portions de la série

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

en partant d'un terme quelconque. Voici comment d'Alembert y parvient. (*Recherches sur différens points du système du monde, tom. 1, pag. 50.*)

Soit u' ce que devient la fonction u lorsqu'on y change x en $x+h$; et posant

$$u'=u+P,$$

en différentiant par rapport à h, il viendra

$$\frac{du'}{dh}=\frac{dP}{dh},\text{ d'où }P=\int\frac{du'}{dh}dh$$

$$u'=u+\int\frac{du'}{dh}dh.$$

Soit

$$\frac{du'}{dh}=\frac{du}{dx}+Q;$$

en différentiant de nouveau par rapport à h, en obser-

vant que u ne contient pas h, il viendra . .

$$\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{dQ}{dh}, \text{ d'où } Q=\int\frac{d^2u'}{dh^2}dh$$

$$\frac{du'}{dh}=\frac{du}{dx}+\int\frac{d^2u'}{dh^2}dh$$

$$u'=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\iint\frac{d^2u'}{dh^2}dh^2.$$

Faisant encore

$$\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u}{dx^2}+R,$$

en trouvera

$$\frac{d^3u'}{dh^3}=\frac{dR}{dh}, \text{ d'où } R=\int\frac{d^3u'}{dh^3}dh$$

$$\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u}{dx^2}+\int\frac{d^3u'}{dh^3}dh$$

$$u'=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\iiint\frac{d^3u'}{dh^3}dh^3.$$

En continuant ainsi, on trouvera en général

$$u'=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\int^n\frac{d^nu'}{dh^n}dh^n,$$

les intégrales étant prises de manière à s'évanouir lorsque $h=0$.

385. Soit pour abréger $\frac{d^nu'}{dh^n}=H$; on aura (222).

$$\int^n Hdh^n=$$

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left\{h^{n-1}\int Hdh-\frac{(n-1)h^{n-2}}{1}\int Hhdh\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)h^{n-3}}{1.2}\int Hh^2dh+\text{etc.}\right\}$$

et il est facile de voir qu'on pourra substituer à la série ci-dessus la formule

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int H(t-h)^{n-1}\mathrm{d}h,$$

prise depuis $h=0$, pourvu qu'on change après l'intégration t en h; car si on la développe, qu'on passe hors du signe $\int$ les puissances de t qui multiplient les différens termes, et qu'on fasse ensuite $t=h$, on retombera sur la série ci-dessus.

Il suit de-là que

$$u'=u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\mathrm{d}^{n-1}u}{\mathrm{d}x^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{1.2\ldots(n-1)}{1}\int\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}h^n}(t-h)^{n-1}\mathrm{d}h,$$

pourvu qu'on prenne l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $h=0$, et qu'on change ensuite t en h.

On peut, dans cette formule, changer $\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}h^n}$ en $\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}x^n}$ (21); et si l'on fait, sous le signe intégral, $t-h=zt$, ou $h=t(1-z)$, on aura

$$\mathrm{d}h=-t\mathrm{d}z,\quad \int\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}x^n}(t-h)^{n-1}=-\int\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}x^n}t^nz^{n-1}\mathrm{d}z.$$

Les limites de l'intégrale seront alors $z=1$, $z=0$; on la rendra positive, en renversant l'ordre de ses limites, c'est-à-dire, en la prenant depuis $z=0$, jusqu'à $z=1$: enfin sortant t^n du signe $\int$, et écrivant h, au lieu de t, le dernier terme de la formule ci-dessus deviendra

$$\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)}\int\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}x^n}z^{n-1}\mathrm{d}z.$$

C'est Lagrange qui a donné ce dernier théorême, mais d'une autre manière dans la *Théorie des Fonctions analytiques*, nos 47 et suivans.

ADDITIONS.

Addition au n°. 37, page 39.

CE volume étant devenu plus considérable que je ne m'y étois attendu, je n'ai pu insérer dans l'Appendice sur les différences et les séries, la manière de former par les différences, les tables des fonctions circulaires, comme j'ai fait à l'égard des logarithmes: pour suppléer à ce défaut, je vais donner des séries dues au citoyen Bertrand de Genève, au moyen desquelles on peut calculer rapidement une valeur très-approchée de l'arc de $o^q,5$ pour le cercle dont le rayon $=1$. On tirera de là la longueur des autres arcs du même cercle; et par les formules du n°. 37, on calculera les sinus et les cosinus de ces arcs.

Si l'on faisoit $x=1$, l'arc y, qui seroit alors la huitième partie de la circonférence, auroit pour expression la série $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-$ etc.
Cette série est trop peu convergente pour être employée, mais on peut calculer les mêmes arcs en deux parties, la tangente de chacune étant plus petite que l'unité, on aura des séries convergentes. Le citoyen Bertrand trouve que l'arc de $o^q,5$ est égal à quatre fois celui qui a pour tangente $\frac{1}{7}$, moins l'arc dont la tangente est égale à $\frac{1}{239}$; en effet, si l'on fait $\text{tang}\, a=\frac{1}{7}$, on trouve successivement (Trig. 26)

$$\text{tang}\, 2a=\frac{2\,\text{tang}\, a}{1-\text{tang}\, a^2}=\frac{5}{12},$$

$$\text{tang}\, 4a=\frac{120}{119},$$

le dernier nombre, un peu plus fort que l'unité, tangente de $0^q,5$, fait voir que $4a > 0^q,5$: faisant donc

$$4a = A, \quad 0^q,5 = B,$$

la différence $4a - 0^q,5$ ou $A - B$, aura pour tangente

$$\text{tang}(A-B) = \text{tang}\, b = \frac{\text{tang}\, A - \text{tang}\, B}{1 + \text{tang}\, A \,\text{tang}\, B} = \frac{1}{239};$$

et comme $B = A - (A-B)$, il viendra $0^q,5 = 4a - b$.

Or en prenant successivement $x = \frac{1}{5}, x = \frac{1}{239}$, on trouve

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.(239)^3} + \frac{1}{5.(239)^5} - \frac{1}{7.(239)^7} + \text{etc.}$$

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \text{etc.}$$

d'où on conclura

$$0^q,5 = \begin{cases} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \text{etc.}\right) \\ \left(-\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Addition au n°. 94, page 113.

La valeur de γ étant susceptible du double signe $\pm$, on peut demander lequel des deux il faut employer; car il est bien visible qu'en général, à chaque point de la courbe, il n'y a qu'un seul rayon de courbure. La détermination de ce signe dépend de la convention qu'on fait sur le sens de la courbure par rapport à celui dans lequel est dirigée la normale. Si l'on veut que le rayon de courbure soit positif pour les courbes dont la concavité est tournée vers l'axe des abscisses, comme la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est alors négative (76), il faut affecter l'expression de γ

du signe $-$; et dans ce cas le rayon de courbure deviendra négatif si la concavité de la courbe passe du côté opposé, parce qu'il change de signe avec $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Le rayon de courbure n'étant pas en général dirigé dans le sens des ordonnées ou des abscisses, n'a pas, à proprement parler, de signe par rapport à ces lignes; mais si on lui en donne un, il faut avoir soin de ne comparer les résultats qu'avec la formule qui a servi à les obtenir, sans quoi on tomberoit dans des contradictions. Par exemple, nous avons trouvé à la page 122, le rayon de courbure de la parabole négatif, parce que nous avons employé la valeur positive de γ. Si on vouloit remonter de ce résultat à l'équation de la courbe, ou le comparer à la normale, il faudroit faire usage de la même valeur de γ, sans quoi on trouveroit une autre courbe que la parabole. Au reste, puisqu'on a coutume de regarder comme positif le rayon de courbure des courbes concaves vers l'axe des abscisses, on pourra supposer dans les applications

$$\gamma=-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx\,d^2y}$$

et changer en conséquence le signe des résultats rapportés dans le texte.

Addition au n°. 113, page 142.

Si on ne fait pas attention à la note de la page 141, on pourra être étonné de voir substituer en même temps dans la valeur de ME, l'expression du rayon de courbure calculée en faisant $\sin(t-m)=0$, et celle de AT, obtenue en faisant $\cos(t-m)=0$. Mais la difficulté

s'évanouira lorsqu'on se sera convaincu que l'expression du rayon de courbure ne contenant que des différentielles de t, est indépendante de la première valeur de cette quantité. On peut aussi former l'expression de MF dans la même hypothèse que celle qu'on a faite pour avoir AT'; en suivant la marche tracée dans l'ouvrage, on passera par les équations

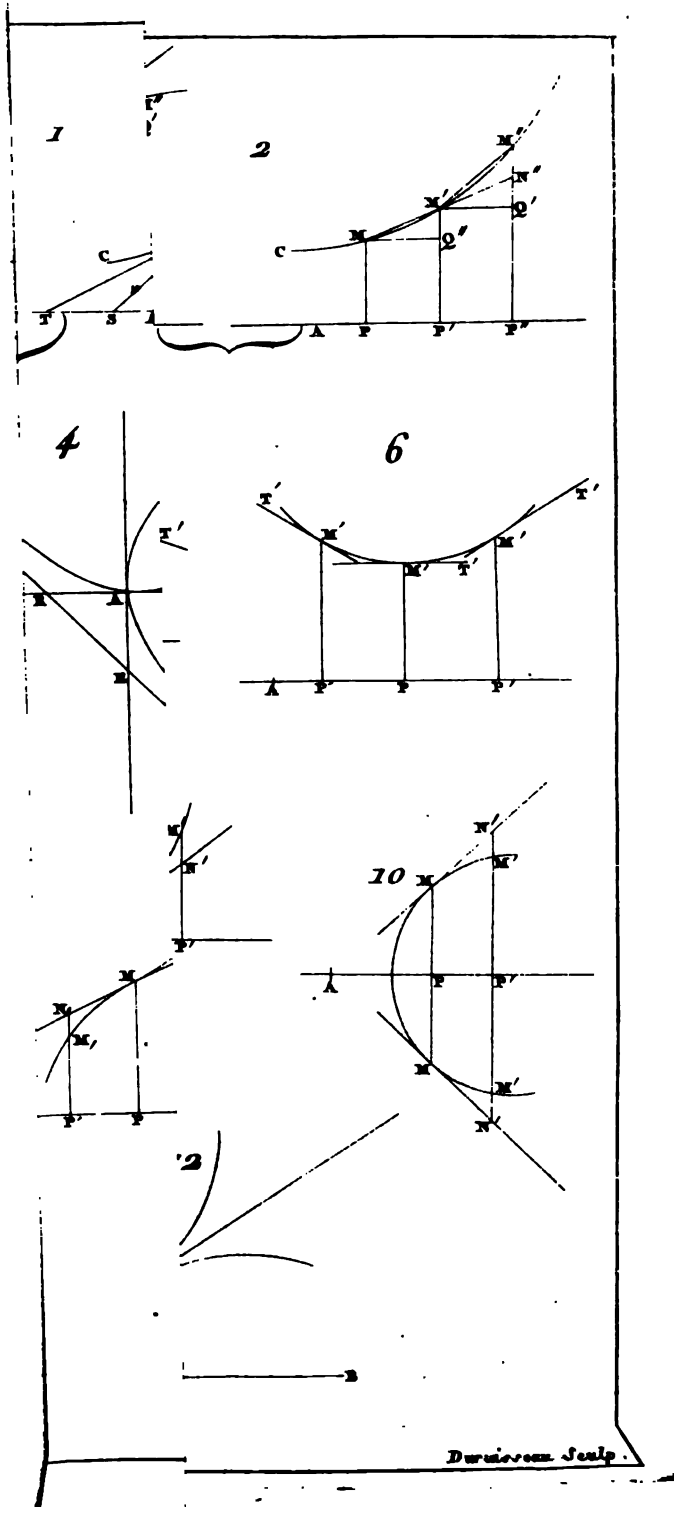
$$\sin(t-m)=1, \quad \cos(t=m)=0$$
$$dx=-u\,dt, \quad dy=du$$
$$0=2\,du\,dt+u\,d^2t, \quad d^2y=d^2u-u\,dt^2$$

d'où on tirera

$$MF=\frac{(u^2dt^2+du^2)^{\frac{3}{2}}}{u^2dt^3-u\,dt\,d^2u}, \quad ME=-\frac{u^2dt^2+du^2}{u\,dt^2-d^2u}.$$

Ces formules, lorsqu'on les applique, mènent d'ailleurs aux mêmes résultats que celles du n°. cité, pourvu qu'on différentie l'équation de la courbe proposée, suivant l'hypothèse établie par l'équation $0=2\,du\,dt+u\,d^2t$, et se transforment, d'après cette hypothèse, dans celles du n°. 115.

FIN.


1
2
4
6
10
Duruisseau Sculp.

OCT 16 1928